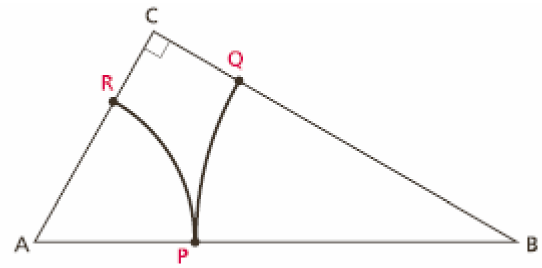
ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO
Tema di: MATEMATICA
a. s. 2007-2008

PROBLEMA 1

Il triangolo rettangolo ABC ha l'ipotenusa AB = a e l'angolo $C\hat{A}B = \frac{\pi}{3}$.

a) Si descriva, internamente al triangolo, con centro in B e raggio x, l'arco di circonferenza di estremi P e Q rispettivamente su AB e su BC. Sia poi R l'intersezione con il cateto CA dell'arco di circonferenza di centro A e raggio AP. Si specifichino le limitazioni da imporre ad x affinchè la costruzione sia realizzabile



b) Si esprima in funzione di x l'area S del quadrilatero mistilineo PQCR e si trovi quale sia il valore minimo e quale il valore massimo di S(x).

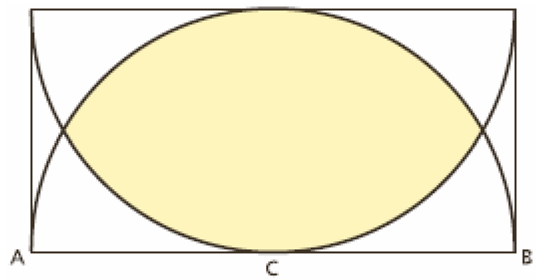
c) Tra i rettangoli con un lato su AB e i vertici del lato opposto su ciascuno dei due cateti si determini quello di area massima.

d) Il triangolo ABC è la base di un solido W. Si calcoli il volume di W sapendo che le sue sezioni, ottenute tagliandolo con piani perpendicolari ad AB, sono tutti quadrati.

PROBLEMA 2

Assegnato nel piano il semicerchio Γ di centro C e diametro AB = 2, si affrontino le seguenti questioni:

a) Si disegni nello stesso semipiano di Γ un secondo semicerchio Γ_1 tangente ad AB in C e di uguale raggio 1. Si calcoli l'area dell'insieme piano intersezione dei due semicerchi Γ e Γ_1



b) Si trovi il rettangolo di area massima inscritto in Γ.

c) Sia P un punto della semicirconferenza di Γ, H la sua proiezione ortogonale su AB.

Si ponga $P\hat{C}B = x$ e si esprimano in funzione di x le aree di S_1 e S_2 dei triangoli APH e PCH.

Si calcoli il rapporto $f(x) = \dfrac{S_1(x)}{S_2(x)}$

d) Si studi f(x) e se ne disegni il grafico prescindendo dai limiti geometrici del problema.

QUESTIONARIO

1) Si consideri la seguente proposizione: "Se due solidi hanno uguale volume, allora, tagliati da un fascio di piani paralleli, intercettano su di essi sezioni di uguale area". Si dica se essa è vera o falsa e si motivi esaurientemente la risposta.

2) Ricordando che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio, si provi che $\sin\dfrac{\pi}{10} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

3) Fra le casseruole, di forma cilindrica, aventi la stessa superficie S (quella laterale più il fondo) qual è quella di volume massimo?

4) Si esponga la regola del marchese de L'Hôpital (1661 – 1704) e la si applichi per dimostrare che è:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{2008}}{2^x} = 0$$

5) Si determini un polinomio P(x) di terzo grado tale che:

$$P(0) = P'(0) = 0, P(1) = 0 \text{ e } \int_0^1 P(x)dx = \frac{1}{12}$$

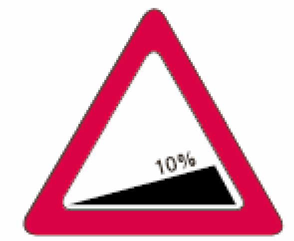
6) Se $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}$ con $n > 3$ sono in progressione aritmetica, qual è il valore di n?

7) Si determini, al variare di k, il numero delle soluzioni reali dell'equazione: $x^3 - 3x^2 + k = 0$

8) Sia f la funzione definita da $f(x) = \pi^x - x^\pi$ Si precisi il dominio di f e si stabilisca il segno delle sue derivate, prima e seconda, nel punto $x = \pi$.

9) Sia $f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x-1|}$; esiste $\lim_{x \to +1} f(x)$? Si giustifichi la risposta.

10) Secondo il codice della strada il segnale di "salita ripida" (fig. sotto) preavverte di un tratto di strada con pendenza tale da costituire pericolo. La pendenza vi `e espressa in percentuale e nell'esempio è 10%. Se si sta realizzando una strada rettilinea che, con un percorso di 1, 2 km, supera un dislivello di 85m, qual è la sua inclinazione (in gradi sessagesimali)? Quale la percentuale da riportare sul segnale?



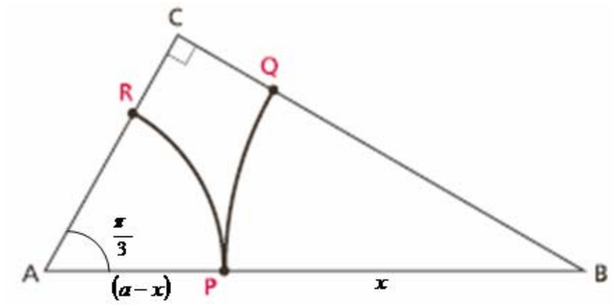
PROBLEMA 1

Il triangolo rettangolo ABC ha l'ipotenusa AB = a e l'angolo $C\hat{A}B = \frac{\pi}{3}$**.**

Punto a

Si descriva, internamente al triangolo, con centro in B e raggio x, l'arco di circonferenza di estremi P e Q rispettivamente su AB e su BC. Sia poi R l'intersezione con il cateto CA dell'arco di circonferenza di centro A e raggio AP. Si specifichino le limitazioni da imporre ad x affinchè la costruzione sia realizzabile.

Consideriamo la figura sottostante:

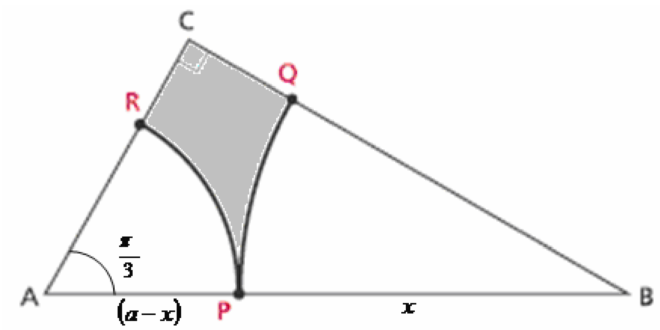


La costruzione è realizzabile se i punti Q ed R si trovano entrambi internamente ai cateti BC ed AC. In particolare se $Q \equiv C$ $BC = x = a \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, mentre se $R \equiv C$ $AC = a - x = a \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{a}{2}$ da cui $x = \frac{a}{2}$. In conclusione affinchè la costruzione sia realizzabile si deve imporre $\frac{a}{2} \le x \le \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Punto b

Si esprima in funzione di x l'area S del quadrilatero mistilineo PQCR e si trovi quale sia il valore minimo e quale il valore massimo di S(x).

Consideriamo la figura seguente:



L'area del quadrilatero PQCR è calcolabile come differenza tra l'area del triangolo rettangolo ABC e l'area dei due settori circolari $PAR_{Sett.Circ}$ e $PBQ_{Sett.Circ}$. In particolare si ha:

$$S_{ABC}=\frac{\frac{a}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$$

$$S_{PAR_{Sett.Circ}}=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{(a-x)^2}{2}=\frac{\pi\cdot(a-x)^2}{6}$$

$$S_{PBQ_{Sett.Circ}}=\frac{\pi}{6}\cdot\frac{x^2}{2}=\frac{\pi\cdot x^2}{12}$$

per cui $S(x)=\frac{a^2\sqrt{3}}{8}-\frac{\pi\cdot(a-x)^2}{6}-\frac{\pi\cdot x^2}{12}=-\frac{\pi}{4}\cdot x^2+\frac{\pi}{3}a\cdot x+a^2\left(\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{\pi}{6}\right)$ con $\frac{a}{2}\le x\le\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

La funzione area $S(x)$ è una parabola con concavità verso il basso, per cui essa raggiunge il suo massimo nell'ascissa del vertice ed in particolare $x_{\max}=-\frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)a}{\left(-\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{2}{3}a$ cui corrisponde $S(x_{\max})=-\frac{\pi}{4}\cdot\frac{4}{9}a^2+\pi\cdot\frac{2}{9}a^2+a^2\left(\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{\pi}{6}\right)=a^2\left(\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{\pi}{18}\right)$. Un altro modo per calcolare il valore massimo è sfruttare le derivate; le derivate prima e seconda della funzione area sono $S'(x)=\frac{\pi}{2}\left(-x+\frac{2}{3}a\right)$ ed $S''(x)=-\frac{\pi}{2}<0\ \ \forall x\in R$. Tenendo conto della limitazione geometrica la funzione area è strettamente crescente in $\left]\frac{a}{2},\frac{2}{3}a\right[$, strettamente decrescente in $\left]\frac{2}{3}a,\frac{a\sqrt{3}}{2}\right[$ e si annulla in $x=\frac{2}{3}a$ in cui assume il valore massimo.

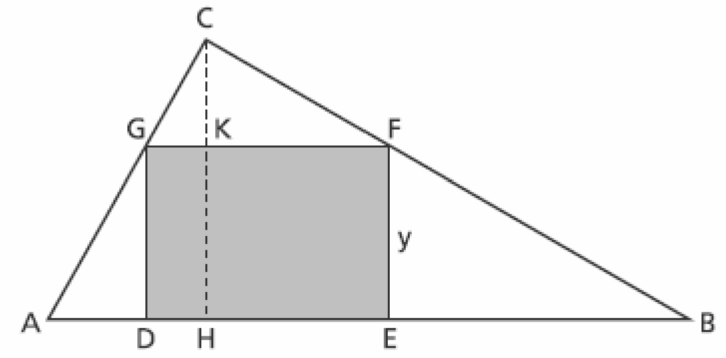
Per quanto riguarda il valore minimo, può essere raggiunto solamente in uno degli estremi dell'intervallo $\left[\frac{a}{2},\frac{a\sqrt{3}}{2}\right]$; in particolare $S\left(\frac{a}{2}\right)=a^2\left(\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{\pi}{16}\right),S\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)=a^2\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{\pi}{6}\left(\frac{17}{8}-\sqrt{3}\right)a^2$.

Ora, essendo $7>4\sqrt{3}$ si ha $\frac{1}{16}<\frac{17}{48}-\frac{\sqrt{3}}{6}$ da cui $S\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)<S\left(\frac{a}{2}\right)$ per cui l'area minima la si ha per $x=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ e vale $S(x_{\min})=a^2\left[\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{\pi}{6}\left(\frac{17}{8}-\sqrt{3}\right)\right]$.

Punto c

Tra i rettangoli con un lato su AB e i vertici del lato opposto su ciascuno dei due cateti si determini quello di area massima.

Consideriamo la figura seguente:



I triangoli CGF e CAB sono simili per cui vale la proporzione $CH : AB = CK : GF$. Ma $AB = a, CH = \frac{S_{ABC}}{a} = a\frac{\sqrt{3}}{4}$ per cui i limiti geometrico impongono che $y \in \left]0, \frac{a\sqrt{3}}{4}\right[$. Ora $CK = CH - y = a\frac{\sqrt{3}}{4} - y$ mentre dalla proporzione ricaviamo $GF = \frac{AB \cdot CK}{CH} = \frac{a \cdot \left(a\frac{\sqrt{3}}{4} - y\right)}{a\frac{\sqrt{3}}{4}} = a - \frac{4\sqrt{3}}{3}y$. L'area del rettangolo DEFG è allora $R(y) = y \cdot \left(a - \frac{4\sqrt{3}}{3}y\right)$ con $y \in \left]0, \frac{a\sqrt{3}}{4}\right[$. L'area del rettangolo è una parabola con concavità verso il basso, per cui essa raggiunge il suo massimo nell'ascissa del vertice ed in particolare $y_{\max} = -\frac{a}{\left(-\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)} = a\frac{\sqrt{3}}{8}$ cui corrisponde $R(y_{\max}) = a\frac{\sqrt{3}}{8}\left(a - a\frac{4\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{8}\right) = a^2\frac{\sqrt{3}}{8}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = a^2\frac{\sqrt{3}}{16}$. Allo stesso risultato si giunge se si applica il metodo delle derivate.

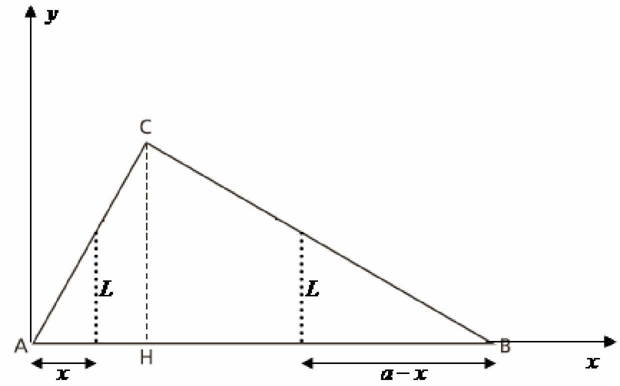
Punto d

Il triangolo ABC è la base di un solido W. Si calcoli il volume di W sapendo che le sue sezioni, ottenute tagliandolo con piani perpendicolari ad AB, sono tutti quadrati.

Il volume può essere calcolato per due strade: sfruttando nozioni di analisi o di geometria solida.

- **Volume attraverso nozioni di analisi**

Consideriamo la figura sottostante:



Sappiamo che $AH = \frac{a}{4}$, per cui se $x \in \left[0, \frac{a}{4}\right]$ il lato del quadrato sezione sarà pari a $L = x \cdot \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = x\sqrt{3}$ cui corrisponde l'area del quadrato sezione $A_Q(x) = L^2 = 3x^2$; se $x \in \left[\frac{a}{4}, a\right]$ il lato del quadrato sezione sarà pari a $L = (a-x) \cdot \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = (a-x)\frac{\sqrt{3}}{3}$ cui corrisponde l'area del quadrato sezione $A_Q(x) = L^2 = \frac{(a-x)^2}{3}$.

Quindi la funzione area vale: $A_Q(x) = \begin{cases} 3x^2 & 0 \le x \le \frac{a}{4} \\ \frac{(a-x)^2}{3} & \frac{a}{4} \le x \le a \end{cases}$

In tal modo il volume richiesto sarà:

$$V = \int_0^a A_Q(x)dx = \int_0^{\frac{a}{4}} 3x^2 dx + \int_{\frac{a}{4}}^{a} \frac{(a-x)^2}{3} dx = \left[x^3\right]_0^{\frac{a}{4}} - \left[\frac{(a-x)^3}{9}\right]_{\frac{a}{4}}^{a} = \frac{a^3}{64} + \frac{3a^3}{64} = \frac{a^3}{16}.$$

- **Volume attraverso nozioni di geometria**

Il solido W che si ottiene può essere pensato come composto da due piramidi base-base, cioè piramidi incollate tramite le basi. La prima piramide ha altezza AH, mentre la seconda ha altezza BH. Per cui il volume totale è la somma dei due volumi delle due piramidi componenti ed in particolare:

$V = \frac{1}{3} \cdot AH \cdot CH^2 + \frac{1}{3} \cdot HB \cdot CH^2 = \frac{1}{3} \cdot AB \cdot CH^2 = \frac{1}{3} \cdot a \cdot \left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2 = \frac{a^3}{16}$ come già provato.

PROBLEMA 2

Assegnato nel piano il semicerchio Γ di centro C e diametro AB = 2, si affrontino le seguenti questioni:

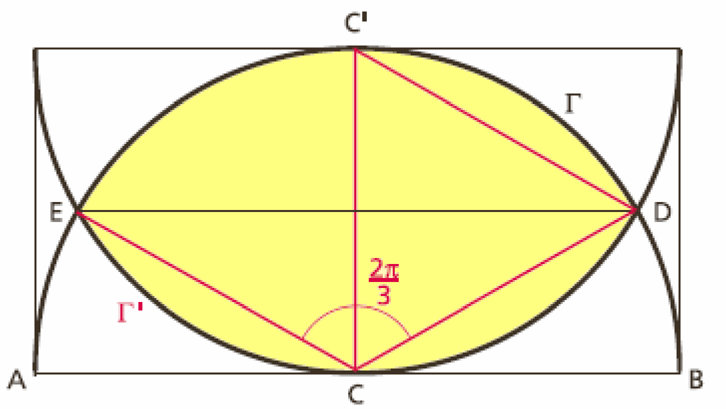
Punto a

Si disegni nello stesso semipiano di Γ un secondo semicerchio Γ_1 tangente ad AB in C e di uguale raggio 1. Si calcoli l'area dell'insieme piano intersezione dei due semicerchi Γ e Γ_1.

L'area richiesta può essere calcolata in due modi possibili: per via geometrica e per via analitica. Mostriamo entrambe le soluzioni.

- **Via geometrica**

Consideriamo la figura sottostante:

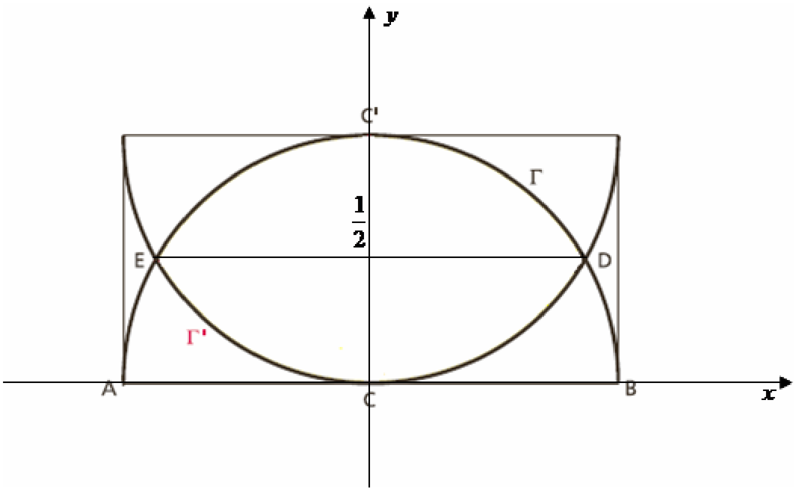


L'area tra le due circonferenze, per simmetria è il doppio della differenza tra l'area del settore circolare $ECD_{Sett.Circ}$ e l'area del triangolo ECD. Notiamo che il triangolo CDC' è equilatero di lato unitario per costruzione, per cui l'apertura del settore circolare $ECD_{Sett.Circ}$ è $\frac{2\pi}{3}$; l'area del settore $ECD_{Sett.Circ}$ di raggio unitario ed apertura $\frac{2\pi}{3}$ è $S_{ECD_{Sett.Circ}} = \frac{\pi}{3}$; per calcolare l'area del triangolo ECD, notiamo che ha base $2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$ ed altezza $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ per cui avrà area $\frac{\sqrt{3}}{4}$. In conclusione l'area tra i due semicerchi è $S = 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$,

- **Via analitica**

La via analitica consiste nel considerare i due semicerchi in un sistema di riferimento cartesiano .

Il sistema di riferimento più semplice ha origine coincidente col centro C del semicerchio Γ che avrà il diametro AB di estremi $A=(-1,0), B=(1,0)$. Di conseguenza la circonferenza frontiera di Γ avrà equazione $x^2+y^2=1$. Il semicerchio Γ_1 ha centro C' in $C'=(0,1)$ e raggio anch'esso unitario per cui la circonferenza frontiera di Γ_1 avrà equazione $x^2+(y-1)^2=1 \Leftrightarrow x^2+y^2-2y=0$ come nel grafico sottostante evidenziato



Le intersezioni tra i due semicerchi si trovano mettendo a sistema le due equazioni:

$$E,D:\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2+y^2-2y=0 \end{cases} \xrightarrow{\text{sottraendo la prima alla seconda}} \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right) \\ D=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

Ora notiamo che nel semipiano $y>\frac{1}{2}$ la circonferenza Γ è rappresentata dall'equazione $y=\sqrt{1-x^2}$, mentre nel semipiano $y<\frac{1}{2}$ la circonferenza Γ_1 è rappresentata dall'equazione $y=1-\sqrt{1-x^2}$. In tal modo l'area racchiusa dai semicerchi è

$$S=\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left[\sqrt{1-x^2}-\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)\right]dx=2\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sqrt{1-x^2}\,dx-\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}dx=2\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sqrt{1-x^2}\,dx-\sqrt{3}.$$

Il primo integrale lo calcoliamo attraverso il metodo di integrazione per parti.

Integrando si ha:

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx=x\sqrt{1-x^2}-\int\frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=x\sqrt{1-x^2}-\int\frac{-x^2+1-1}{\sqrt{1-x^2}}dx=$$

$$=x\sqrt{1-x^2}+\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx-\int\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=x\sqrt{1-x^2}+\arcsin(x)-\int\sqrt{1-x^2}\,dx$$

Da cui

$$2\int \sqrt{1-x^2}\,dx = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x) + k \Rightarrow$$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x) \right] + k$$

L'area sarà allora pari a:

$$S = 2\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx - \sqrt{3} \overset{\substack{Integrando \\ pari}}{=} 4\int_{0}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx - \sqrt{3} =$$

$$= 2\left[x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x) \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \sqrt{3} =$$

$$= 2\left[\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{3} \right] - \sqrt{3} = 2\left[-\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{3} \right]$$

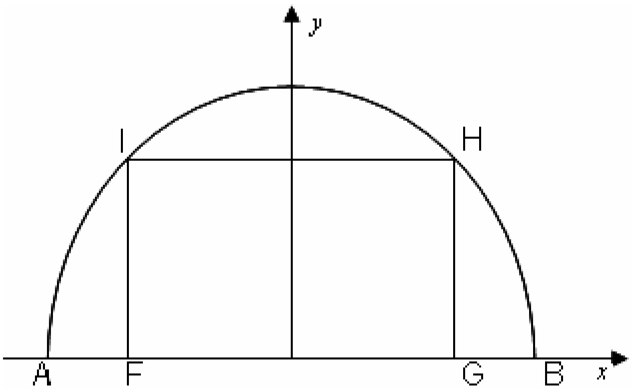
<u>*Punto b*</u>

Si trovi il rettangolo di area massima inscritto in Γ.

Il rettangolo di area massima può essere trovato attraverso differenti soluzioni. Se ne presenteranno 3:

- **Uso della geometria analitica e dell'analisi**

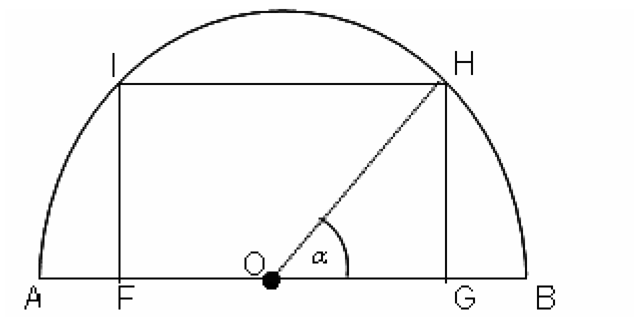
  Si consideri la figura sottostante in cui il rettangolo e la semicirconferenza sono rappresentati in un sistema di riferimento cartesiano con l'origine coincidente con il centro della semicirconferenza:



La base HI del rettangolo FGHI si trova sulla retta generica di equazione $y = k, k \in \left]0,1\right[$. I punti di intersezione di suddetta retta con la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$ sono rispettivamente $H = \left(\sqrt{1-k^2}, k\right), I = \left(-\sqrt{1-k^2}, k\right)$, mentre F e G hanno coordinate $F = \left(-\sqrt{1-k^2}, 0\right), G = \left(\sqrt{1-k^2}, 0\right)$. Con queste coordinate la base del rettangolo sarà pari a $b = FG = HI = 2\sqrt{1-k^2}$, e l'altezza $h = HG = IF = 2|k| \overset{k\in]0,1[}{=} 2k$. L'area del rettangolo è allora $S(k)=4k\sqrt{1-k^2}$ con $k\in\left]0,1\right[$. Massimizziamo la funzione area attraverso il calcolo della derivata prima: $S'(k)=4\sqrt{1-k^2}-\frac{4k^2}{\sqrt{1-k^2}}=\frac{4\left(1-2k^2\right)}{\sqrt{1-k^2}}$ per cui in $\left]0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$ la funzione è strettamente crescente, in $\left]\frac{\sqrt{2}}{2},1\right[$ è strettamente decrescente e si annulla in $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$ in cui assume il valore massimo. Quindi il rettangolo di area massima ha vertici $G=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0\right), H=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right), I=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right), F=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$ ed il rettangolo di area massima è costituito da due quadrati di lato $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ed area $\frac{1}{2}$. Pertanto il rettangolo ha area massima unitaria.

- **Uso della trigonometria**

  Si consideri la figura sottostante:

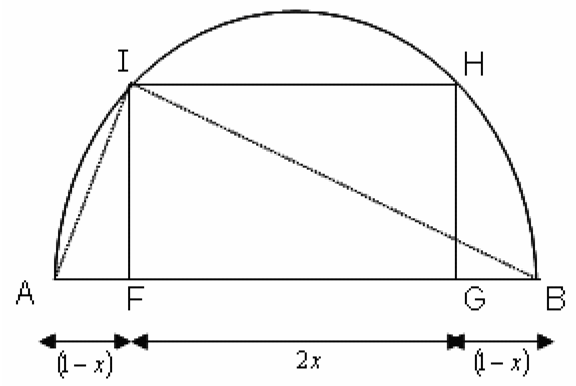


La limitazione geometrica impone $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

In tal caso per il teorema sui triangoli rettangoli $OG=\cos(\alpha), HG=\sin(\alpha)$, per cui $S(\alpha)=FG\cdot HG=2OG\cdot HG=2\cos(\alpha)\cdot\sin(\alpha)=\sin(2\alpha)$, ed essendo l'area una funzione seno, essa è massima quando $\sin(2\alpha)=1$ e quindi quando $2\alpha=\frac{\pi}{2}+2k\pi\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{4}+k\pi$ e per $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ il valore accettabile è $\alpha=\frac{\pi}{4}$ in corrispondenza del quale la base del rettangolo vale $FG=\sqrt{2}$ e l'altezza $HG=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

- **Uso della geometria elementare e dell'analisi**

  Si consideri la figura sottostante:



Poniamo la base del rettangolo $FG = 2x$. La limitazione geometrica impone $0 < x < 1$. Con queste assunzioni $AF = (1-x), FB = (1+x)$, per cui per il teorema di Euclide $IF = HG = \sqrt{(1-x)\cdot(1+x)} = \sqrt{1-x^2}$. L'area del rettangolo è allora $S(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$ e poiché $0 < x < 1$ si ha $x = \sqrt{x^2}$ da cui $S(x) = 2\sqrt{x^2(1-x^2)}$. La massimizzazione della funzione area, come già mostrato, può essere effettuata tramite le derivate; non seguiremo questa strada ma mostreremo una strada alternativa. Massimizzare $S(x) = 2\sqrt{x^2(1-x^2)}$ è equivalente a massimizzare la funzione radicando $r(x) = x^2(1-x^2)$; la funzione $r(x)$ è il prodotto di due numeri a somma costante (e pari a 1: $x^2 + (1-x^2) = 1$) per cui il loro prodotto è massimo quando i due numeri sono uguali[1] e quindi quando $x^2 = (1-x^2)$ da cui $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$; la soluzione negativa va scartata per cui l'area del rettangolo è massima quando $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e quindi quando $FG = \sqrt{2}, IG = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e vale $S\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)} = 1$.

Punto c

Sia P un punto della semicirconferenza di Γ, H la sua proiezione ortogonale su AB.

Si ponga $P\hat{C}B = x$ e si esprimano in funzione di x le aree di S_1 e S_2 dei triangoli APH e PCH.

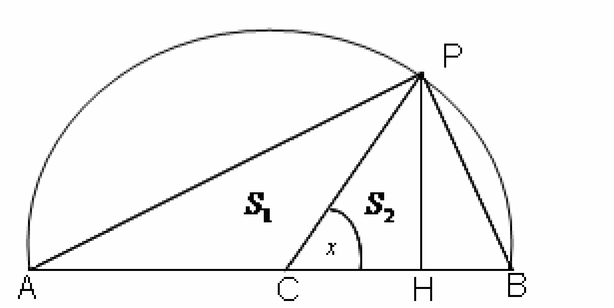
Si calcoli il rapporto $f(x) = \frac{S_1(x)}{S_2(x)}$

[1] Siano x, y due numeri positivi la cui somma è $x + y = s$ ed il cui prodotto è $xy = p$. Dalla somma si ricava $y = s - x$ che sostituito nel prodotto fornisce $p = x(s-x)$; pertanto il prodotto è una parabola con concavità verso il basso e con massimo raggiunto per $x = \frac{s}{2}$ cui corrisponde $y = \frac{s}{2}$.

Per rispondere al quesito dobbiamo distinguere i due casi corrispondenti rispettivamente alla considerazioni di un angolo $P\hat{C}B = x$ acuto $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$ od ottuso $\left(\frac{\pi}{2} < x < \pi\right)$.

- I caso: $P\hat{C}B = x$ acuto $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$

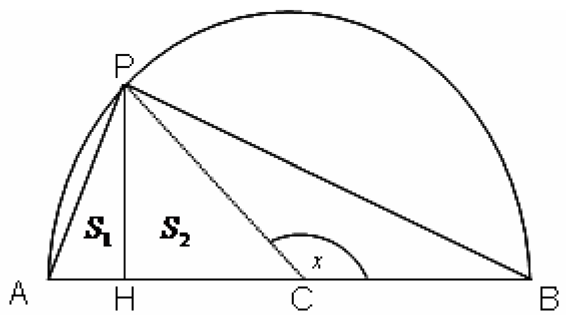
La figura da considerare è la seguente:



In tal caso $CH = \cos(x), PH = \sin(x), AH = 1+\cos(x)$ per cui $S_1(x) = \frac{1}{2}(1+\cos(x))\sin(x)$ ed $S_2(x) = \frac{1}{2}\cos(x)\sin(x)$ per cui $f(x) = \frac{1+\cos(x)}{\cos(x)}$.

- II caso: $P\hat{C}B = x$ ottuso $\left(\frac{\pi}{2} < x < \pi\right)$.

La figura da considerare è la seguente:



In tal caso $CH = \cos(\pi - x) = -\cos(x), PH = \sin(x), AH = 1+\cos(x)$ per cui $S_1(x) = \frac{1}{2}(1+\cos(x))\sin(x)$ ed $S_2(x) = -\frac{1}{2}\cos(x)\sin(x)$ per cui $f(x) = -\frac{1+\cos(x)}{\cos(x)}$.

In conclusione, contemplando entrambi i casi, la funzione rapporto tra le due aree è $f(x) = \frac{S_1(x)}{S_2(x)} = \frac{1+\cos(x)}{|\cos(x)|}$. In realtà, data la non negatività di $1+\cos(x)$, la funzione rapporto tra le due aree può in conclusione essere $f(x)=\frac{S_1(x)}{S_2(x)}=\frac{1+\cos(x)}{|\cos(x)|}=\left|\frac{1+\cos(x)}{\cos(x)}\right|$ con $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

Punto d

Si studi f(x) e se ne disegni il grafico prescindendo dai limiti geometrici del problema.

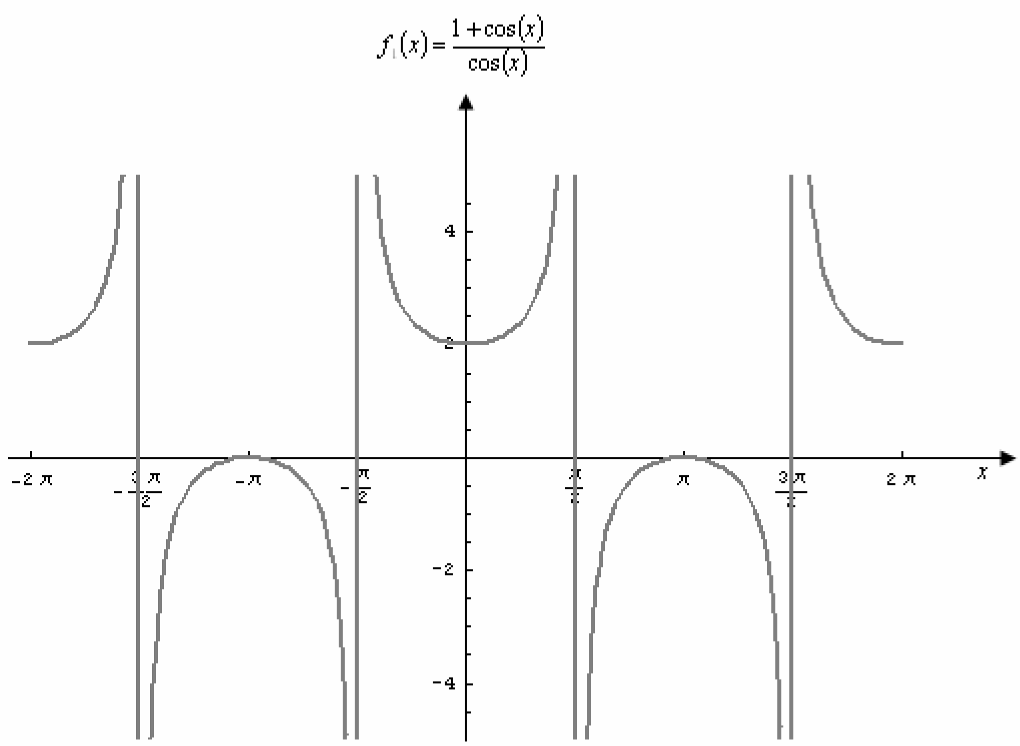
Per lo studio della funzione $f(x)=\left|\frac{1+\cos(x)}{\cos(x)}\right|$, basta studiare la funzione $f_1(x)=\frac{1+\cos(x)}{\cos(x)}$, dal momento che il grafico di $f(x)=\left|\frac{1+\cos(x)}{\cos(x)}\right|$ si ricava da quello di $f_1(x)=\frac{1+\cos(x)}{\cos(x)}$ ribaltando verso le ordinate positive le parti di grafico al di sotto dell'asse delle ascisse. A tal riguardo studiamo la funzione $f_1(x)=\frac{1+\cos(x)}{\cos(x)}$ nell'intervallo $[0,2\pi]$ visto che risulta essere periodica con periodo $T=2\pi$.

- **Dominio:** $\cos(x)\neq 0 \Rightarrow x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$**;**
- **Eventuali simmetrie:** la funzione è pari: infatti $f_1(-x)=\frac{1+\cos(-x)}{\cos(-x)}=\frac{1+\cos(x)}{\cos(x)}=f_1(x)$;
- **Intersezioni asse ascisse:** $f_1(x)=\frac{1+\cos(x)}{\cos(x)}=0\Leftrightarrow\cos(x)=-1\Rightarrow x=\pi$;
- **Intersezioni asse ordinate:** $x=0\Rightarrow y=2$**;**
- **Positività:** $f_1(x)=\frac{1+\cos(x)}{\cos(x)}\geq 0\Rightarrow\cos(x)>0\Rightarrow x\in\left(0.\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$;
- **Asintoti verticali:** le rette $x=\frac{\pi}{2}, x=\frac{3\pi}{2}$ sono asintoti verticali; infatti
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{1+\cos(x)}{\cos(x)}=-\infty,\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{1+\cos(x)}{\cos(x)}=+\infty$$
$$\lim_{x\to\left(\frac{3\pi}{2}\right)^+}\frac{1+\cos(x)}{\cos(x)}=+\infty,\ \lim_{x\to\left(\frac{3\pi}{2}\right)^-}\frac{1+\cos(x)}{\cos(x)}=-\infty$$
- **Asintoti orizzontali:** non ce ne sono;
- **Asintoti obliqui:** non ce ne sono;
- **Crescenza e decrescenza:** $f_1^{'}(x)=\frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$ per cui

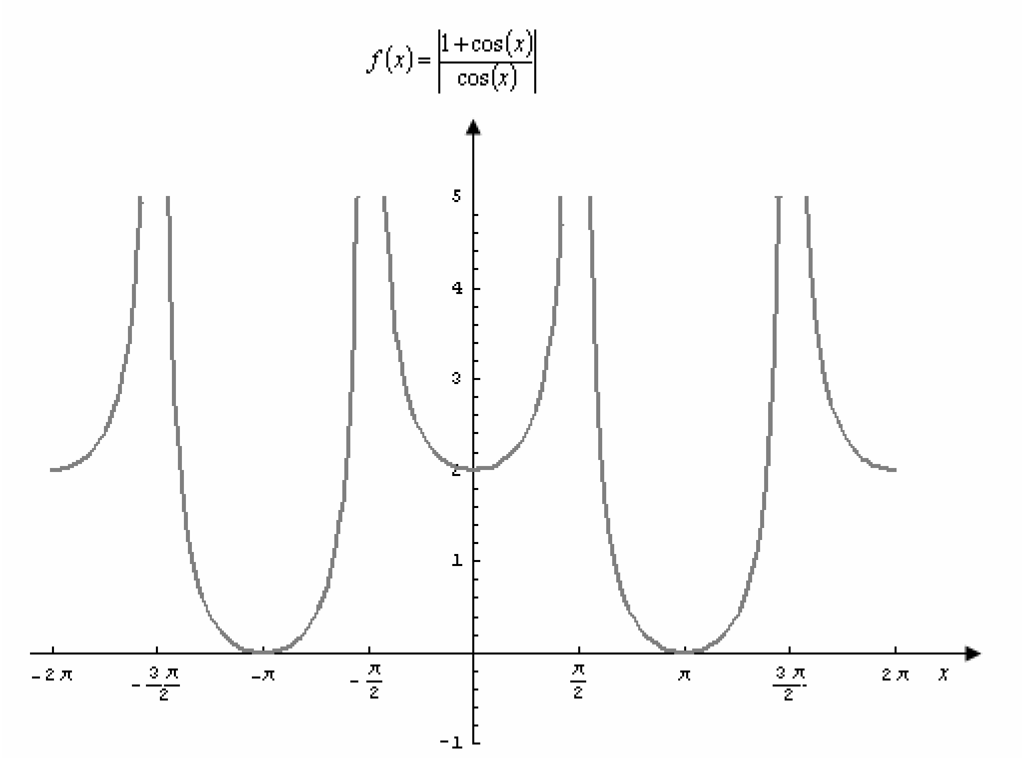
$f_1^{'}(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos^2(x)} > 0 \Rightarrow 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \vee \dfrac{\pi}{2} < x < \pi$ e si annulla in $x = 0$ e $x = \pi$;

- **Flessi:** la derivata seconda è $f_1^{''}(x) = \dfrac{1+\sin^2(x)}{\cos^3(x)}$ per cui, non annullandosi mai, non ci sono flessi a tangente obliqua; inoltre $f_1^{''}(\pi) = -1 < 0$ pertanto la funzione ammette un massimo in $(\pi,0)$ e nessun flesso a tangente orizzontale.

Il grafico, in cui si è considerato che la funzione è periodica con periodo $T = 2\pi$, è di seguito presentato nell'intervallo $[-2\pi, 2\pi]$:



Il grafico di $f(x) = \left|\dfrac{1+\cos(x)}{\cos(x)}\right|$ è di seguito riportato:


$f(x)=\left|\frac{1+\cos(x)}{\cos(x)}\right|$
5
4
3
2
1
-1
-2π
$-\frac{3\pi}{2}$
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π
x

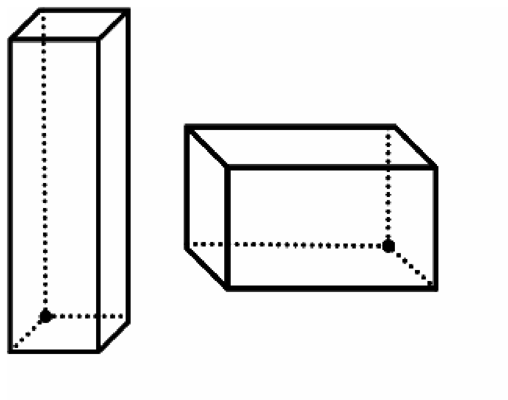
QUESTIONARIO

Quesito 1

Si consideri la seguente proposizione: "Se due solidi hanno uguale volume, allora, tagliati da un fascio di piani paralleli, intercettano su di essi sezioni di uguale area". Si dica se essa è vera o falsa e si motivi esaurientemente la risposta.

La proposizione è falsa in quanto si tratta della proposizione inversa del Principio di Cavalieri che poneva una condizione sufficiente ma non necessaria per l'equiestensione dei solidi. Infatti il principio suddetto così recitava: "*Se due solidi hanno uguale altezza e se le sezioni tagliate da piani paralleli alle basi e ugualmente distanti da queste stanno sempre in un dato rapporto, anche i volumi dei solidi staranno in questo rapporto.*"

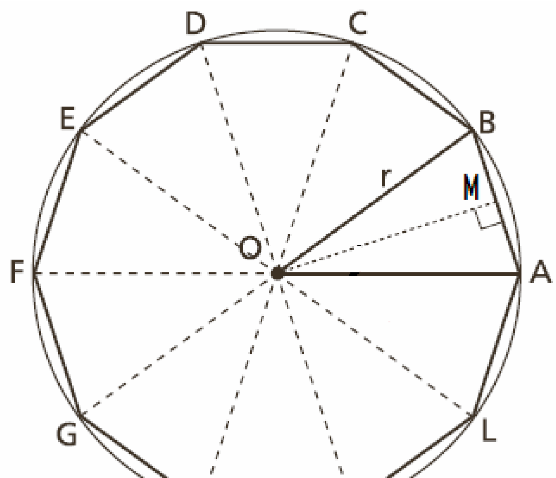
Per dimostrare la falsità della proposizione, basta considerare due parallelepipedi con le stesse dimensioni, e quindi con stesso volume, che poggiano su basi differenti come a lato.



Quesito 2

Ricordando che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio, si provi che $\sin\frac{\pi}{10}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

Consideriamo la figura sottostante:

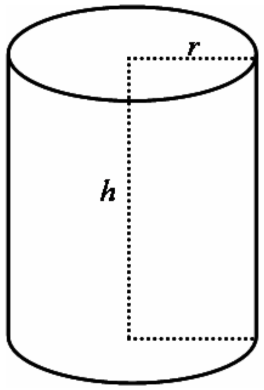


L'angolo $A\hat{O}B = \frac{\pi}{5}$ in quanto $\frac{1}{10}$ dell'angolo giro. Il lato AB è la sezione aurea del raggio per cui $AB = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ da cui $MA = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Ma per il teorema dei seni $MA = AO \cdot \sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$ da cui per confronto si ricava $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Quesito 3

Fra le casseruole, di forma cilindrica, aventi la stessa superficie S (quella laterale più il fondo) qual è quella di volume massimo?

Si consideri il cilindro sottostante di raggio *r* ed altezza *h*:



La superficie ed il volume del cilindro saranno:

$$S = \pi r^2 + 2\pi r h$$
$$V = \pi h r^2$$

Dalla superficie ricaviamo l'altezza $h = \frac{S - \pi r^2}{2\pi r}$ con $0 < r < \sqrt{\frac{S}{\pi}}$ e sostituendo nel volume si ha $V(r) = \pi r^2 \left(\frac{S - \pi r^2}{2\pi r}\right) = \frac{rS - \pi r^3}{2}$. Derivando il volume in funzione del raggio si ha $V'(r) = \frac{S - 3\pi r^2}{2}$ per cui la funzione risulta strettamente crescente in $\left(0, \sqrt{\frac{S}{3\pi}}\right)$, strettamente decrescente in $\left(\sqrt{\frac{S}{3\pi}}, \sqrt{\frac{S}{\pi}}\right)$ e si annulla in $r = \sqrt{\frac{S}{3\pi}}$. Inoltre $V''\left(\sqrt{\frac{S}{3\pi}}\right) = \left[-3\pi r\right]_{r=\sqrt{\frac{S}{3\pi}}} = -3\pi\sqrt{\frac{S}{3\pi}} < 0$, per cui la casseruola di volume massimo è quella per cui

$r = \sqrt{\frac{S}{3\pi}}$ ed il volume massimo vale $V_{\max} = \frac{S}{3}\sqrt{\frac{S}{3\pi}}$.

Quesito 4

Si esponga la regola del marchese de L'Hôpital (1661 – 1704) e la si applichi per dimostrare che è:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{2008}}{2^x} = 0$$

Enunciamo la regola di de L' Hôpital:

Se due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ definite in un intorno di $+\infty$, sono derivabili in tale intorno, con $g'(x) \neq 0$; se le due funzioni, per $x \to +\infty$ tendono entrambe a 0 o a ∞ e se esiste il limite del rapporto delle derivate delle funzioni date, $\frac{f'(x)}{g'(x)}$, allora esiste anche il limite del rapporto delle funzioni $\frac{f(x)}{g(x)}$ e vale $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

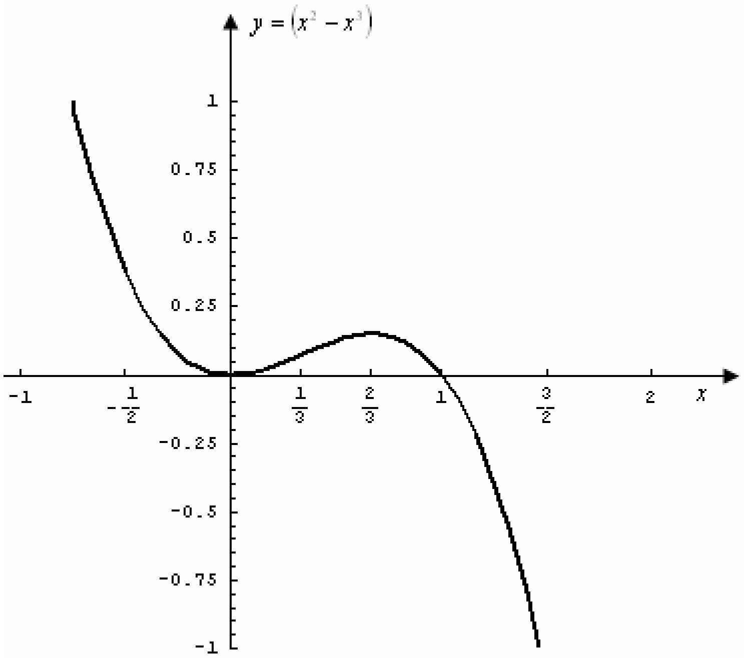
Nel caso in esame è possibile applicare tale teorema e, dopo averlo applicato 2008 volte si ha $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{2008}}{2^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2008!}{(\ln 2)^{2008} \cdot 2^x} = 0$ dal momento che $D[x^n] = nx^{n-1}$ se $n \geq 1, D[2^x] = \ln 2 \cdot 2^x$.

Quesito 5

Si determini un polinomio P(x) di terzo grado tale che:

$$P(0) = P'(0) = 0, P(1) = 0 \text{ e } \int_0^1 P(x)dx = \frac{1}{12}$$

Il generico polinomio di terzo grado p una cubica di equazione $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, la cui derivata prima è la parabola $y' = 3ax^2 + 2bx + c$. Ora $P(0) = 0 \Rightarrow d = 0$, mentre $P'(0) = 0 \Rightarrow c = 0$; inoltre $P(1) = 0 \Rightarrow b = -a$ per cui il polinomio diventa $y = a(x^3 - x^2)$. Imponendo la condizione $\int_0^1 P(x)dx = \frac{1}{12}$ ricaviamo $\int_0^1 a(x^3 - x^2)dx = a\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = -\frac{a}{12}$ da cui per confronto si ottiene $\begin{cases} a = -1 \\ b = -a = 1 \end{cases}$. Il polinomio è quindi $y = (x^2 - x^3)$. Tale funzione è strettamente positiva in $]-\infty, 0[\cup]0,1[$, assume un minimo in (0,0), un massimo in $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{27}\right)$ ed un flesso in $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{9}\right)$. Il grafico di seguito.



__Quesito 6__

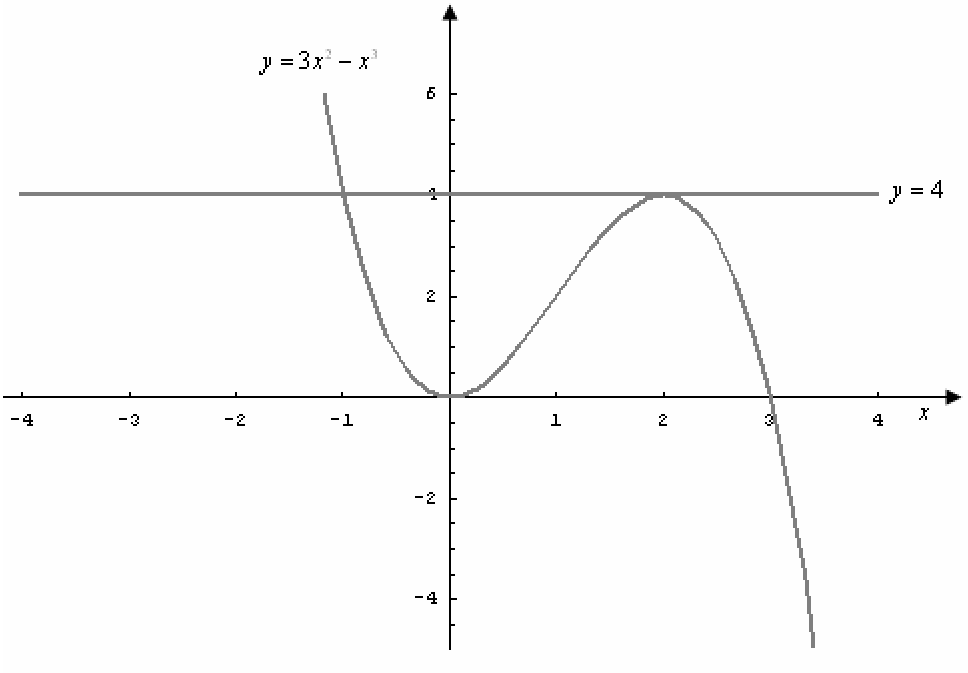
Se $\binom{n}{1},\binom{n}{2},\binom{n}{3}$ con $n>3$ sono in progressione aritmetica, qual è il valore di n?

Ricordiamo che una successione a_n è in progressione aritmetica quando la differenza tra un suo elemento ed il precedente è pari ad una costante, detta ragione. Questo equivale nel nostro caso a porre che $\binom{n}{3}-\binom{n}{2}=\binom{n}{2}-\binom{n}{1}$ e quindi $\binom{n}{3}-2\binom{n}{2}+\binom{n}{1}=0$. Applicando la definizione di coefficiente binomiale si ha: $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}-2\frac{n(n-1)}{2}+n=0$ da cui si ricava $n(n^2-9n+14)=n(n-2)(n-7)=0 \Rightarrow n=0, n=2, n=7$, Dovendo essere $n>3$ la soluzione accettabile è $n=7$. Infatti $\binom{7}{3}-\binom{7}{2}=\frac{5\cdot 6\cdot 7}{6}-\frac{6\cdot 7}{2}=14$ e $\binom{7}{2}-\binom{7}{1}=\frac{6\cdot 7}{2}-7=14$.

__Quesito 7__

Si determini, al variare di k, il numero delle soluzioni reali dell'equazione: $x^3-3x^2+k=0$

Si tratta di discutere il sistema $\begin{cases} y=k \\ y=3x^2-x^3 \end{cases}$. La retta $y=k$ è parallela all'asse delle ascisse, mentre la cubica di equazione $y=3x^2-x^3$ è definita in tutto R, interseca le ascisse in $(0,0)$ e $(3,0)$ e le ordinate in (0,0), è positiva o uguale a zero per $x\le 3$, non presenta asintoti, presenta un minimo in $m=(0,0)$, un massimo in $M=(2,4)$ ed un flesso in $(1,2)$. Consideriamo il grafico sottostante che raffigura la cubica e la retta di equazione $y=4$ nello stesso riferimento cartesiano:



Dal grafico si notano le seguenti soluzioni:

- $k > 4$: 1 soluzione negativa
- $k = 4$: 3 soluzioni di cui una negativa e due coincidenti pari a $x = 2$
- $0 < k < 4$: 3 soluzioni di cui una negativa e due positive distinte
- $k = 0$: 3 soluzioni di cui una positiva e pari a $x = 3$ e due coincidenti pari a $x = 0$
- $k < 0$: 1 soluzione positiva

Riassumendo si ha:

- $k < 0 \vee k > 4$: 1 soluzione
- $0 \leq k \leq 4$: 3 soluzioni

Quesito 8

Sia f la funzione definita da $f(x) = \pi^x - x^\pi$ Si precisi il dominio di f e si stabilisca il segno delle sue derivate, prima e seconda, nel punto $x = \pi$.

La funzione in esame può essere così scritta: $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ in cui il dominio di $f_1(x) = \pi^x$ è tutto R, mentre il dominio di $f_2(x) = x^\pi$ è R^+; quindi anche la funzione differenza ha come dominio R^+ e cioè $(0,+\infty)$.

Le derivate sono:

$$f'(x) = \ln\pi \cdot \pi^x - \pi \cdot x^{\pi-1}$$
$$f''(x) = \ln^2\pi \cdot \pi^x - \pi \cdot (\pi-1) x^{\pi-2}$$

e valutate per $x = \pi$ forniscono

$$f'(\pi) = \ln\pi \cdot \pi^{\pi} - \pi \cdot \pi^{\pi-1} = \pi^{\pi} \cdot (\ln\pi - 1)$$
$$f''(\pi) = \ln^2 \pi \cdot \pi^{\pi} - \pi \cdot (\pi - 1)\pi^{\pi-2} = \pi^{\pi}\left(\ln^2 \pi - 1\right) + \pi^{\pi-1}$$

Ora essendo $\pi > e \Rightarrow \ln\pi > \ln e = 1$ per cui entrambe le derivate in $x = \pi$ assumono valore positivo.

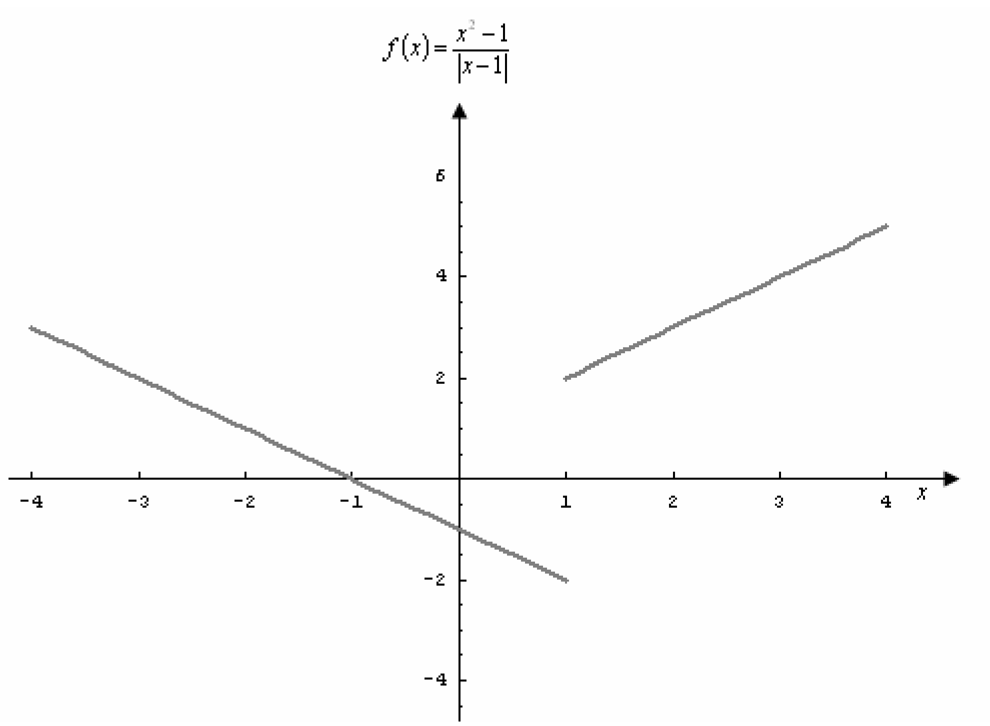
Quesito 9

Sia $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{|x-1|}$; esiste $\lim\limits_{x\to+1} f(x)$? Si giustifichi la risposta.

La funzione $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{|x-1|}$ ha come dominio $R/\{1\}$ e può essere così riscritta: $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{|x-1|} = \begin{cases} x+1 & x > 1 \\ -x-1 & x < 1 \end{cases}$.

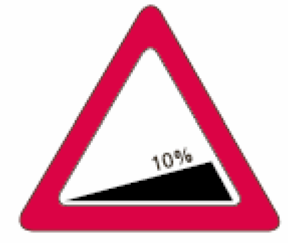
Ora $\lim\limits_{x\to1^+}\left(\dfrac{x^2-1}{|x-1|}\right) = \lim\limits_{x\to1^+}(x+1) = 2$ mentre $\lim\limits_{x\to1^-}\left(\dfrac{x^2-1}{|x-1|}\right) = \lim\limits_{x\to1^-}(-x-1) = -2$

e poiché i limiti sono diversi concludiamo che il limite richiesto non esiste. La figura di seguito presenta la discontinuità di prima specie della funzione in esame.

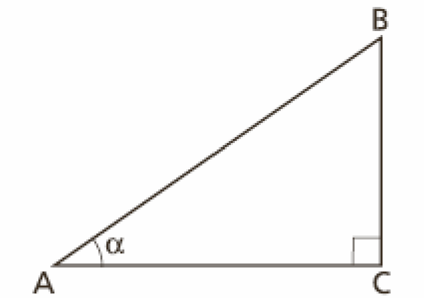


Quesito 10

Secondo il codice della strada il segnale di "salita ripida" (fig. sotto) preavverte di un tratto di strada con pendenza tale da costituire pericolo. La pendenza vi `e espressa in percentuale e nell'esempio è 10%. Se si sta realizzando una strada rettilinea che, con un percorso di 1, 2 km, supera un dislivello di 85m, qual è la sua inclinazione (in gradi sessagesimali)? Quale la percentuale da riportare sul segnale?



Consideriamo la figura sottostante:



Per ipotesi AB=1,2 km, BC=85m.

Per il teorema di Pitagora $AC = \sqrt{1200^2 - 85^2} \cong 1196{,}99m$, per cui la percentuale di inclinazione è

$p_{\%} = \frac{85}{1196{,}99} \cong 7{,}1\%$, mentre l'angolo di inclinazione vale $\alpha = \arctan\left(\frac{85}{1196{,}99}\right) \cong 4{,}06°$.