MINISTERO DELL'ISTRUZIONE, DELL'UNIVERSITA' E DELLA RICERCA

SCUOLE ITALIANE ALL'ESTERO

ESAMI DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
Sessione Ordinaria 2008
Calendario australe
SECONDA PROVA SCRITTA
Tema di Matematica

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

L'ellisse Σ ha equazione $x^2+4y^2=4$ e $P(a,b)$, con $b\geq 0$, è un suo punto.

1. Si determini l'equazione della tangente a Σ in P e se ne indichi con Q l'intersezione con l'asse y.
2. Si determini l'equazione cartesiana del luogo geometrico Ω descritto dal punto medio M del segmento PQ al variare di P.
3. Si studi e si rappresenti Ω avendo trovato che la sua equazione è: $y=\frac{(2-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}}$

PROBLEMA 2

Il trapezio $ABCD$ è isoscele e circoscritto ad un cerchio di raggio 1. Si ponga la base minore $CD=2x$

1. Si provi che è: $AB=\frac{2}{x}$
2. Si dimostri che il volume del solido, ottenuto dalla rotazione completa del trapezio attorno alla base maggiore, assume il valore minimo per $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$
3. In corrispondenza di tale valore di x, si calcoli l'area del quadrilatero avente per vertici i quattro punti in cui il trapezio è tangente al cerchio.

QUESTIONARIO

1. Le misure dei lati di un triangolo sono 10, 24 e 26 *cm* . Si calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, le ampiezze degli angoli del triangolo approssimandole in gradi e primi sessagesimali.
2. Si calcoli e si interpreti geometricamente l'integrale definito: $\int_{-1}^{+1} \frac{1}{1+x^2} dx$
3. La capacità di una damigiana di vino è pari a quella del massimo cono circolare retto inscritto in una sfera di raggio 6*0 cm*. Si dica quanti *litri* di vino la damigiana può contenere.
4. Si dia un esempio, almeno, di polinomio *P(x)* il cui grafico tagli la retta $y = 3$ in 3 punti distinti.
5. Quanti sono i numeri di quattro cifre (distinte tra loro) che è possibile scrivere utilizzando le cifre dispari?
6. Si determinino le costanti a,b,c in modo che le curve di equazioni $f(x) = x^2 + ax + b$ e $g(x) = x^3 + c$ siano tangenti nel punto A(1, 0). Si determini l'equazione della tangente comune.
7. Il cono W e il cilindro T, circolari retti, hanno uguale raggio *r* di base e uguale altezza h. Si calcoli il limite del rapporto delle rispettive superfici totali al tendere di *r* a zero.
8. Si provi che le espressioni $y = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ e $y = \sqrt{3}\sin(x) + \cos(x)$ definiscono la stessa funzione f . Di f si precisi: dominio, codominio e periodo.

Durata della prova: 6 ore.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.

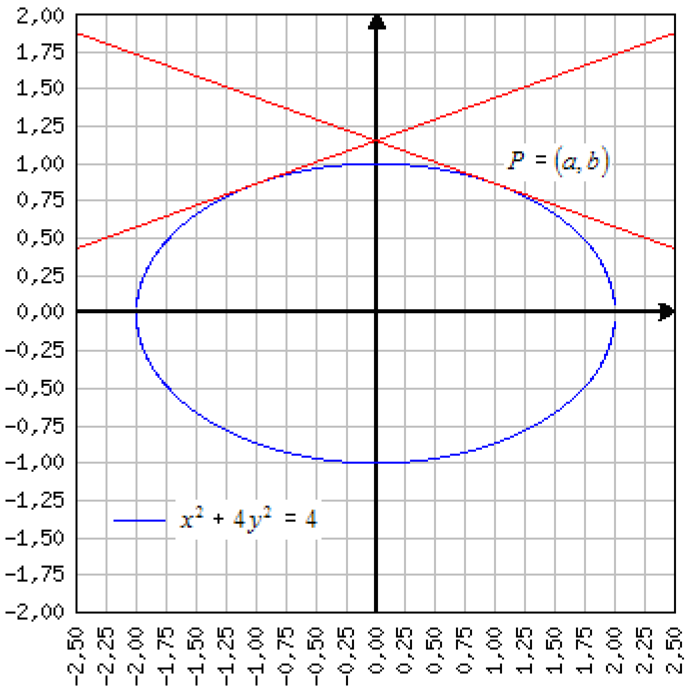
PROBLEMA 1

L'ellisse Σ ha equazione $x^2 + 4y^2 = 4$ e $P(a,b)$, con $b \geq 0$, è un suo punto.

Punto 1

Si determini l'equazione della tangente a Σ in *P* e se ne indichi con *Q* l'intersezione con l'asse *y*.

Il punto $P=(a,b)$, essendo $b \geq 0$, ha coordinate $P=\left(a,\frac{1}{2}\sqrt{4-a^2}\right)$. L'equazione dell'ellisse in forma implicita è $y=\pm\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$ e la parte di essa che ci interessa è quella con determinazione positiva $y=\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$ la cui derivata è $y'=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}\right)$; il coefficiente angolare della retta tangente all'ellisse in $P=\left(a,\frac{1}{2}\sqrt{4-a^2}\right)$ è $m=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-a}{\sqrt{4-a^2}}\right)$. La retta tangente ha equazione $y=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-a}{\sqrt{4-a^2}}\right)(x-a)+\frac{1}{2}\sqrt{4-a^2}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-ax}{\sqrt{4-a^2}}\right)+\left(\frac{2}{\sqrt{4-a^2}}\right)$. Il punto Q di intersezione della tangente con l'asse delle ordinate è $Q=\left(0,\frac{2}{\sqrt{4-a^2}}\right)$.



Punto 2

Si determini l'equazione cartesiana del luogo geometrico Ω descritto dal punto medio *M* del segmento *PQ* al variare di *P*.

Il punto M, medio tra P e Q, ha coordinate $M=\left(\frac{x_P+x_Q}{2},\frac{y_P+y_Q}{2}\right)=\left(\frac{a}{2},\frac{8-a^2}{4\sqrt{4-a^2}}\right)$. Per trovare l'equazione cartesiana del geometrico Ω descritto dal punto medio *M* del segmento *PQ* al variare di *P* risolviamo il sistema $\begin{cases} x=\frac{a}{2} \\ y=\frac{8-a^2}{4\sqrt{4-a^2}} \end{cases}$ ricavando una funzione $y=g(x)$. Il sistema si riscrive nel modo seguente $\begin{cases} a=2x \\ y=\frac{8-a^2}{4\sqrt{4-a^2}} \end{cases}$ da cui si ricava, sostituendo la prima equazione nella seconda,

$$y=g(x)=\frac{8-4x^2}{4\sqrt{4-4x^2}}=\frac{4(2-x^2)}{8\sqrt{1-x^2}}=\frac{(2-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}}$$

Punto 3

Si studi e si rappresenti Ω avendo trovato che la sua equazione è: $y=\frac{(2-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}}$

Studiamo la funzione $y=\frac{(2-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}}$

Dominio: $1-x^2>0 \Leftrightarrow x\in\left]-1,1\right[$

Intersezioni asse x: $y=\frac{(2-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}}=0 \Leftrightarrow (2-x^2)=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$ che non appartengono al dominio, per cui non esistono intersezioni con l'asse delle ascisse.

Intersezioni asse y: $x=0 \Rightarrow y=1$

Positività: $y=\frac{(2-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}}>0 \Leftrightarrow \begin{cases} (2-x^2)>0 \\ -1<x<1 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left]-1,1\right[$ per cui la funzione è sempre positiva nel dominio di definizione.

Asintoti verticali: la funzione presenta due asintoti verticali di equazione $x=\pm 1$. Infatti

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{(2-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}}=\lim_{x\to -1^+}\frac{(2-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}}=+\infty$$

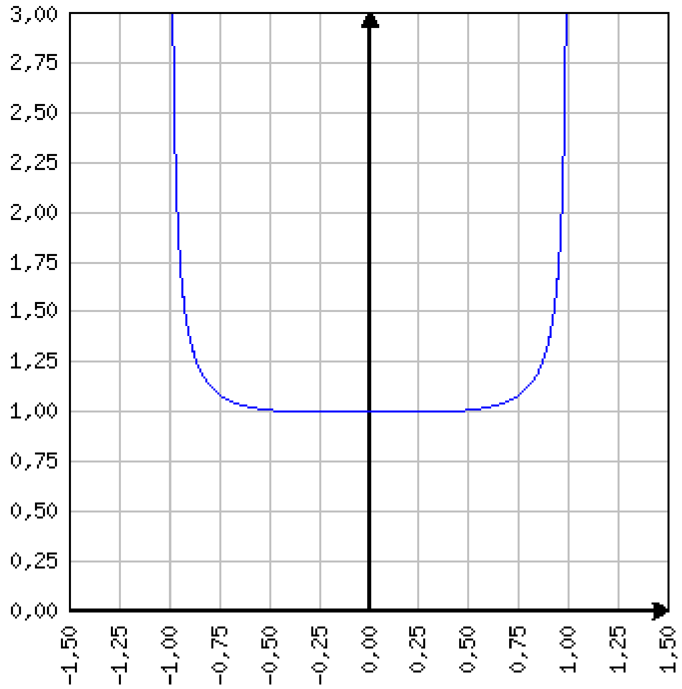
Asintoti orizzontali: per come è definita la funzione non presenta asintoti orizzontali

Asintoti obliqui: per come è definita la funzione non presenta asintoti obliqui

Crescenza e decrescenza: la derivata prima della funzione $y=\frac{(2-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}}$ è $y'=\frac{x^3}{2(1-x^2)^{3/2}}$ per cui la funzione è strettamente crescente in $]0,1[$ e strettamente decrescente in $]-1,0[$.

Concavità e convessità: la derivata seconda della funzione $y=\frac{(2-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}}$ è $y''=\frac{3x^2}{2(1-x^2)^{5/2}}$ che nel dominio di definizione è sempre positiva eccetto in $x=0$ in cui si annulla. Visto che sia la derivata prima che seconda si annullano in $x=0$, per decidere la natura del punto di ascissa $x=0$ dobbiamo calcolare le derivate successive. La derivata terza e quarta sono rispettivamente $y'''=\frac{3x(2+3x^2)}{2(1-x^2)^{7/2}}, y^{IV}=\frac{3(2+21x^2+12x^4)}{2(1-x^2)^{9/2}}$ e si nota che $y'''(0)=0, y^{IV}(0)=3>0$ per cui $(0,1)$ è un punto di minimo relativo ed assoluto.

Il grafico della funzione è di seguito riportato:



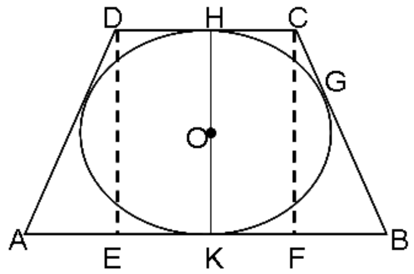
PROBLEMA 2

Il trapezio *ABCD* è isoscele e circoscritto ad un cerchio di raggio 1. Si ponga la base minore $CD = 2x$

Punto 1

Si provi che è: $AB = \frac{2}{x}$

Si consideri la figura seguente:



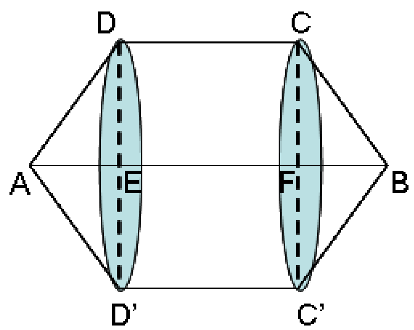
Per il teorema sulle secanti ad una circonferenza si ha $\overline{KB} = \overline{GB}, \overline{HC} = \overline{CG} = x$. Ponendo allora $\overline{KB} = \overline{GB} = y$ con $y > x$, si ha $\overline{CB} = x + y, \overline{FB} = \overline{KB} - \overline{KF} = y - x$, e per il teorema di Pitagora applicato al triangolo CFB si ha $\overline{CF}^2 + \overline{FB}^2 = \overline{CB}^2$ dove $\overline{CF} = 2$. Sostituendo i valori si ha: $4 + (y - x)^2 = (x + y)^2$ da cui si ricava $y = \frac{1}{x}$ e poiché $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{KB} = 2y$ si ricava $\overline{AB} = \frac{2}{x}$.

Punto 2

Si dimostri che il volume del solido, ottenuto dalla rotazione completa del trapezio attorno alla base maggiore, assume il valore minimo per $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Il solido ottenuto dalla rotazione completa del trapezio attorno alla base maggiore, è formato da un cilindro e da due coni. Per simmetria i due coni hanno lo stesso volume, per cui il volume totale è la somma del volume del cilindro e del doppio del volume di uno dei due coni.

Consideriamo a tal riguardo la figura sottostante rappresentante la rotazione intorno alla base maggiore AB del trapezio isoscele ABCD:



Per le considerazioni sopra effettuate si ha $V=V(CDD'C')+2V(ADD')=\left(\pi\cdot\overline{FC}^2\right)\cdot\overline{EF}+2\cdot\frac{\left(\pi\cdot\overline{FC}^2\right)\cdot\overline{FB}}{3}=\left(\pi\cdot\overline{FC}^2\right)\cdot\left(\overline{EF}+\frac{2}{3}\overline{FB}\right)$ e

sostituendo i valori si ha $V(x)=4\pi\cdot\left[2x+\frac{2}{3}\left(\frac{\frac{2}{x}-2x}{2}\right)\right]=4\pi\cdot\left(2x+\frac{2}{3x}-\frac{2}{3}x\right)=\frac{8\pi}{3}\cdot\left(2x+\frac{1}{x}\right)$ con

la condizione $x>0$. Lo derivata prima del volume è $V'(x)=\frac{8\pi}{3}\cdot\left(2-\frac{1}{x^2}\right)$ da cui si deduce che la

funzione volume è strettamente decrescente in $\left]0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$, strettamente crescente in $\left]\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right[$ e si

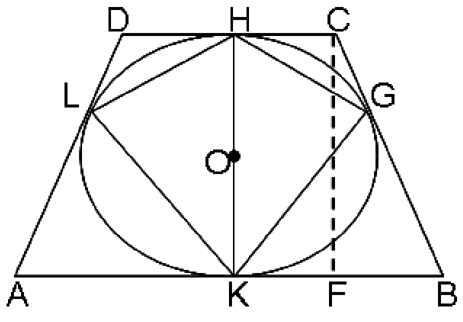
annulla in $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$; inoltre $V''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left[\frac{8\pi}{3}\cdot\left(\frac{2}{x^3}\right)\right]_{x=\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{32\sqrt{2}\pi}{3}>0$ per cui $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ è l'ascissa

del minimo del volume. Il volume minimo è $V\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{16\sqrt{2}\pi}{3}$.

Punto 3

In corrispondenza di tale valore di x, si calcoli l'area del quadrilatero avente per vertici i quattro punti in cui il trapezio è tangente al cerchio.

Si consideri la figura seguente:



L'area del quadrilatero HLKG la si può calcolare come differenza tra l'area del trapezio e l'area dei 4 triangolini DHL, HCG, LAK e GKB. Per simmetria le aree di DHL e HCG coincidono così come sono uguali le aree di LAK e GKB. Con $\overline{HC}=\overline{KF}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, si ha

$\overline{FB}=\overline{KB}-\overline{KF}=\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2},\overline{CB}=\sqrt{\overline{CF}^2+\overline{FB}^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Per il teorema sui triangoli rettangoli si ha $F\hat{C}B = \arcsin\left(\frac{\overline{FB}}{\overline{CB}}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$, da cui $F\hat{B}C = \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$ e $H\hat{C}G = \frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$. Di conseguenza l'area di HCG è $A(HCG) = \frac{1}{2} \cdot \overline{HC}^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{6}$; l'area di GKB è $A(GKB) = \frac{1}{2} \cdot \overline{KB}^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 \cdot \cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

L'area del trapezio è $A(ABCD) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\right) = 3\sqrt{2}$ per cui in conclusione $A(HLKG) = 3\sqrt{2} - 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = 3\sqrt{2} - 2 \cdot \left(\frac{5\sqrt{2}}{6}\right) = \frac{4\sqrt{2}}{3}$.

QUESTIONARIO

Quesito 1

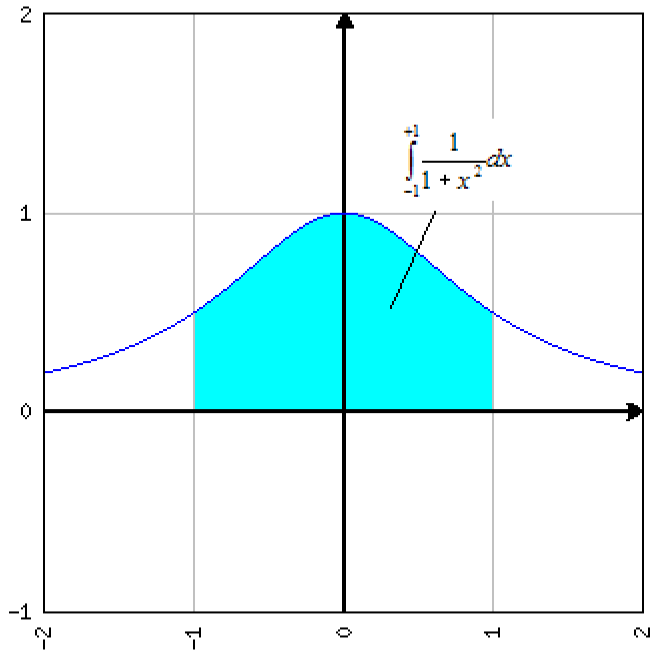
Le misure dei lati di un triangolo sono 10, 24 e 26 *cm* . Si calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, le ampiezze degli angoli del triangolo approssimandole in gradi e primi sessagesimali.

Il triangolo di lati a=10, b=24 e c=26 *cm* è rettangolo in quanto $c^2 = a^2 + b^2$, per cui detti α, β gli angoli alla base del triangolo che si oppongono rispettivamente ai lati a e b, si ha $\alpha = \arcsin\left(\frac{a}{c}\right) = \arcsin\left(\frac{5}{13}\right) \cong 22°37', \beta = \arcsin\left(\frac{b}{c}\right) = \arcsin\left(\frac{12}{13}\right) \cong 67°23'$.

Quesito 2

Si calcoli e si interpreti geometricamente l'integrale definito: $\int_{-1}^{+1} \frac{1}{1+x^2} dx$

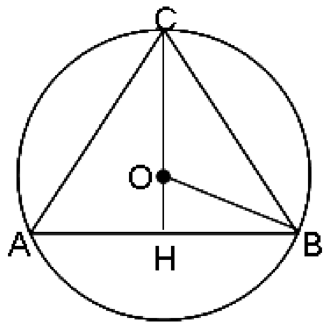
Il valore dell'integrale è $I = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{1+x^2} dx \overset{\substack{Integrando \\ pari}}{=} 2\int_{0}^{+1} \frac{1}{1+x^2} dx = 2[\arctan(x)]_0^1 = 2\arctan(1) = \frac{\pi}{2}$ e rappresenta l'area sottesa dalla funzione integranda $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ nell'intervallo [-1,1].



Quesito 3

La capacità di una damigiana di vino è pari a quella del massimo cono circolare retto inscritto in una sfera di raggio 60 *cm*. Si dica quanti *litri* di vino la damigiana può contenere.

Si consideri la figura seguente:



Sia $\overline{OH} = x\,[\text{cm}]$ con $0 < x < 60$, per il teorema di Pitagora $\overline{HB}^2 = 3600 - x^2$, per cui il volume del cono è $V(x) = \frac{1}{3} \cdot \left(\pi \cdot \overline{HB}^2\right) \cdot \overline{CH} = \frac{\pi}{3} \cdot \left(3600 - x^2\right) \cdot (x + 60)$. Il volume massimo lo calcoliamo attraverso lo studio della derivata prima: $V'(x) = \frac{\pi}{3} \cdot \left[\left(3600 - x^2\right) - 2x \cdot (x + 60)\right] = \frac{\pi}{3} \cdot \left(-3x^2 - 120x + 3600\right) = \pi \cdot (x + 60)(20 - x)$.

Ora con la limitazione $0 < x < 60$ si ha:

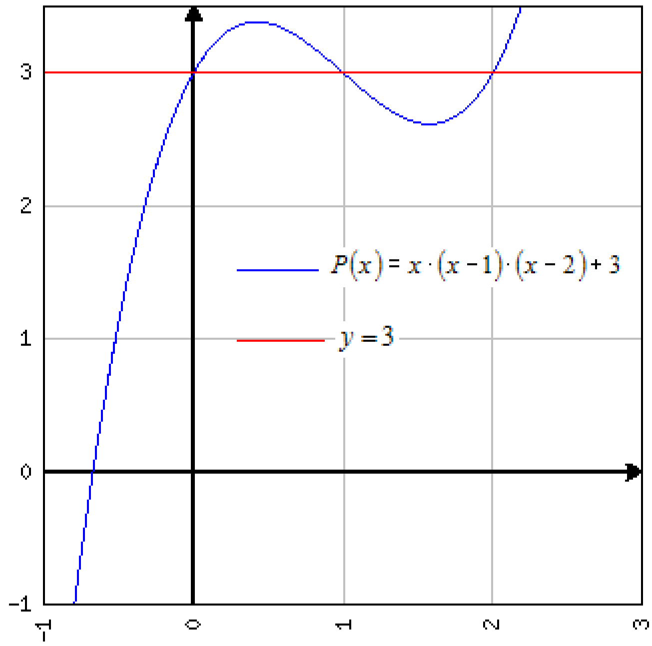
$$V'(x) = \pi \cdot (x + 60)(20 - x) > 0 \Rightarrow 0 < x < 20 \Rightarrow \text{funzione volume strettamente crescente in }]0,20[$$
$$V'(x) = \pi \cdot (x + 60)(20 - x) < 0 \Rightarrow 20 < x < 60 \Rightarrow \text{funzione volume strettamente decrescente in }]20,60[$$
$$V'(x) = \pi \cdot (x + 60)(20 - x) = 0 \Rightarrow x = 20$$

Inoltre $V''(20) = \pi \cdot (-2x - 40)_{x=20} = -80\pi < 0$ per cui il volume è massimo per $x = 20$ e vale $V_{MAX} = V(20) = \frac{256000\pi}{3}\,\left[\text{cm}^3\right]$. Ora ricordando che $1litro = 1dm^3 = 1000cm^3$ si ricava che la damigiana può contenere $\left(\frac{256\pi}{3}\right) litri \cong 268.1\, litri$.

Quesito 4

Si dia un esempio, almeno, di polinomio *P(x)* il cui grafico tagli la retta $y = 3$ in 3 punti distinti.

Il polinomio $Q(x) = x \cdot (x - 1) \cdot (x - 2)$ interseca l'asse delle ascisse di equazione $y = 0$ nei punti di ascissa $x = 1, x = 1, x = 2$ per cui il polinomio $P(x) = Q(x) + 3 = x \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) + 3$ interseca la retta $y = 3$ nei punti ad ascissa $x = 1, x = 1, x = 2$ ed i punti di intersezione sono $(0,3), (1,3), (2,3)$.



Quesito 5

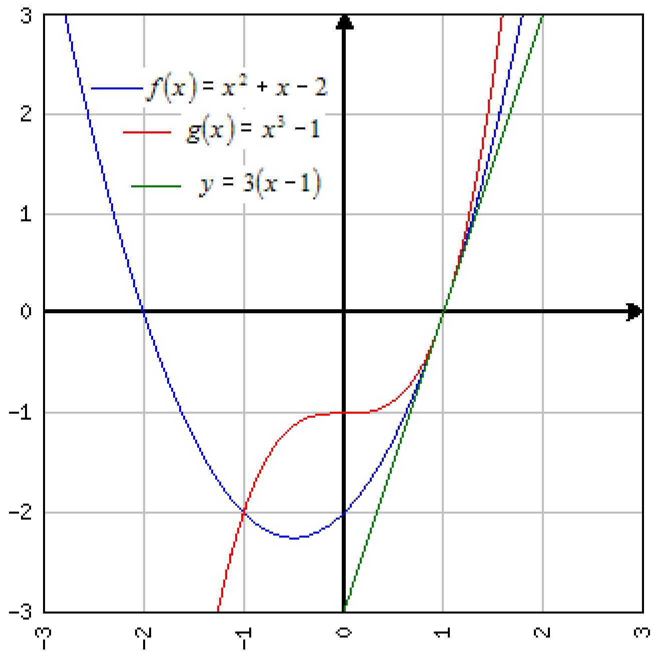
Quanti sono i numeri di quattro cifre (distinte tra loro) che è possibile scrivere utilizzando le cifre dispari?

Per calcolare quanti numeri di 4 cifre distinte è possibile scrivere utilizzando le sole 5 cifre dispari $\{1,3,5,7,9\}$ bisogna applicare la legge delle disposizioni semplici di n elementi distinti di classe k con $k \le n$: $D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$. Nel caso in esame si ha $D_{5,4} = \frac{5!}{(5-4)!} = 5! = 120$.

Quesito 6

Si determinino le costanti a,b,c in modo che le curve di equazioni $f(x) = x^2 + ax + b$ **e** $g(x) = x^3 + c$ **siano tangenti nel punto A(1, 0). Si determini l'equazione della tangente comune.**

Entrambe le curve passano per A(1,0) per cui le prime due condizioni sui coefficienti incogniti si ricavano dall'appartenenza di A(1,0) ad entrambe e cioè $a + b = -1, c = -1$. La condizione di tangenza delle due curve in A(1,0) si traduce nel fatto che la retta tangente in A(1,0) è la stessa per entrambe e quindi basta calcolare i coefficienti angolari delle rette tangenti in A(1,0) alle due curve ed eguagliarli. Il coefficiente angolare della tangente in A(1,0) alla curva $f(x) = x^2 + ax + b$ è $m = (2x + a)_{x=1} = a + 2$ mentre il coefficiente angolare della tangente in A(1,0) alla curva $g(x) = x^3 + c$ è $m' = (3x^2)_{x=1} = 3$; dall'uguaglianza dei due coefficienti angolari ricaviamo $a = 1$ e in ultimo da $a + b = -1$ si ricava $b = -2$. Le due curve sono allora $f(x) = x^2 + x - 2$ e $g(x) = x^3 - 1$ e la tangente in A(1,0) ha equazione $y = 3(x - 1)$.



Quesito 7

Il cono W e il cilindro T, circolari retti, hanno uguale raggio *r* di base e uguale altezza h. Si calcoli il limite del rapporto delle rispettive superfici totali al tendere di *r* a zero.

La superficie totale del cono è $S_W = S_{W,laterale} + A_{Base} = \pi \cdot r \cdot a + \pi \cdot r^2 = \pi \cdot r \cdot (r+a) = \pi \cdot r \cdot \left(r+\sqrt{r^2+h^2}\right)$ mentre quella del cilindro è $S_T = S_{T,laterale} + 2A_{Base} = 2\pi \cdot r \cdot h + \pi \cdot r^2 = \pi \cdot r \cdot (r+2h)$. Il rapporto tra le due superfici totali è $f(r,h) = \frac{\pi \cdot r \cdot \left(r+\sqrt{r^2+h^2}\right)}{\pi \cdot r \cdot (r+2h)} = \frac{\left(r+\sqrt{r^2+h^2}\right)}{(r+2h)}$ per cui $\lim_{r\to 0} f(r,h) = \lim_{r\to 0}\frac{\left(r+\sqrt{r^2+h^2}\right)}{(r+2h)} = \frac{1}{2}$.

Quesito 8

Si provi che le espressioni $y = 2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ e $y=\sqrt{3}\sin(x)+\cos(x)$ definiscono la stessa funzione f. Di f si precisi: dominio, codominio e periodo.

Sfruttando le proprietà del seno di somma di due angoli si ha

$$y = 2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = 2\cdot\left[\sin(x)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\cos(x)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] = 2\cdot\left[\sin(x)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos(x)\cdot\frac{1}{2}\right] = \sqrt{3}\sin(x)+\cos(x)$$

Il dominio è banalmente tutto l'insieme R dei numeri reali, mentre il codominio è l'intervallo [-2,2] dal momento che la funzione seno è limitata in [-1,1], mentre il periodo è 2π.