MINISTERO DELLA PUBBLICA ISTRUZIONE
SCUOLE ITALIANE ALL'ESTERO (EUROPA)
ESAMI DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
Sessione Ordinaria a.s. 2007/08

PROBLEMA 1

La circonferenza γ passa per B (0,-4) ed è tangente in O (0, 0) alla retta di coefficiente angolare –4; la parabola λ passa per A(4,0) ed è tangente in O a γ.

1. Si disegnino γ e λ e se ne determinino le rispettive equazioni cartesiane.

2. Sia α l'angolo sotto cui è visto il segmento OB da un punto dell'arco di γ appartenente al quarto quadrante. Si dia una misura di α approssimandola in gradi e primi sessagesimali.

3 Se P è un punto dell' arco di λ contenuto nel quarto quadrante e H la sua proiezione sull'asse x, si trovi la posizione di P affinché il triangolo OPH abbia area massima.

4 Si conducano le due rette tangenti a λ nei suoi punti O e A; si calcoli l'area del triangolo mistilineo delimitato dall'arco di parabola appartenente al quarto quadrante e dalle due tangenti.

PROBLEMA 2

Nell'insieme delle funzioni y = f (x) tali che

$$y' = \frac{ax}{\left(1+4x^2\right)^2}$$

si trovi quella il cui grafico γ passa per i punti $\left(\frac{1}{2},1\right)$ e $\left(0,2\right)$

1. Constatato che la funzione definita da: $y = \frac{2}{1+4x^2}$ è quella richiesta, si disegni γ.

2. Si conduca la tangente a γ in un suo generico punto P. Sia Q l'intersezione di tale tangente con l'asse x e H la proiezione ortogonale di P sull'asse x. Per quale valore di x è minima la lunghezza del segmento HQ ?

3. Si calcoli l'area della superficie piana delimitata da γ e dagli assi cartesiani.

QUESTIONARIO

1) La regione R delimitata dal grafico di $y = 7\sqrt[3]{x}$, dall'asse x e dalla retta x=2 è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte dei quadrati. Si calcoli il volume di S.

2) Le misure dei lati di un triangolo sono 12, 16 e 20 cm. Si calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, le ampiezze degli angoli del triangolo approssimandole in gradi e primi sessagesimali.

3) Si determini, al variare di k, il numero delle soluzioni reali dell'equazione:

$$x^3 - x^2 - 3k + 2 = 0$$

4) La capacità di una damigiana di vino è pari a quella del massimo cono circolare retto di apotema *50cm*. Si dica quanti *litri* di vino la damigiana può contenere.

5) Si dimostri che l'equazione $x^7 + 5x + 5 = 0$ ha una sola radice reale.

6) Si traccino i grafici delle seguenti funzioni di R in R:

$$f : x \to 5^{x+1}; g : x \to 5^x + 1; h : x \to 5^{|x|}; k : x \to 5^{-x}$$

7) Quale significato attribuisci al simbolo $\binom{n}{k}$? Esiste un k tale che $\binom{10}{k} = \binom{10}{k-2}$?

8) Dimostra che la media geometrica di due numeri positivi non è mai superiore alla loro media aritmetica. Cioè $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$

PROBLEMA 1

La circonferenza γ passa per B (0,-4) ed è tangente in O (0, 0) alla retta di coefficiente angolare –4; la parabola λ passa per A(4,0) ed è tangente in O a γ.

Punto 1

Si disegnino γ e λ e se ne determinino le rispettive equazioni cartesiane.

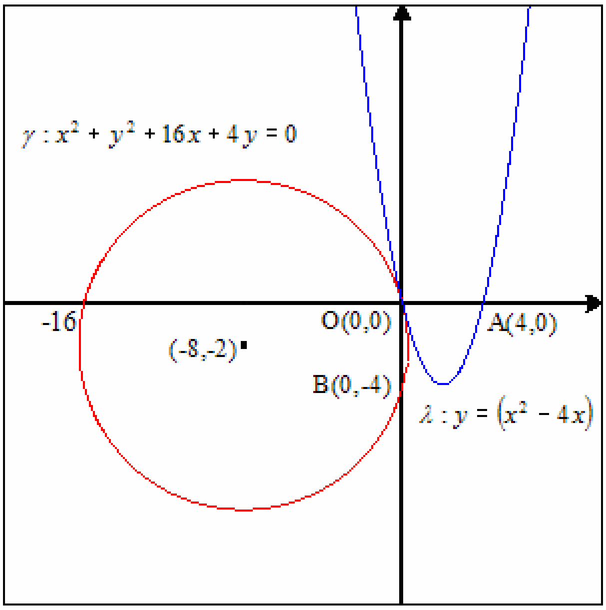
La circonferenza ha una equazione generica $x^2+y^2+ax+by+c=0$. Il passaggio per O(0,0) comporta $c=0$; il passaggio per B(0,-4) comporta, invece, $16-4b+c=0$ da cui sfruttando $c=0$ si ricava $b=4$. L'equazione così diventa: $x^2+y^2+ax+4y=0$. L'altro parametro lo calcoliamo imponendo la condizione di tangenza della circonferenza $x^2+y^2+ax+4y=0$ con la retta $y=-4x$; dall'intersezione tra la circonferenza e la retta si ricava l'equazione $17x^2+x(a-16)=0$ ed imponendo la condizione di tangenza si ricava $a=16$.

La circonferenza, in conclusione, ha equazione $\gamma : x^2+y^2+16x+4y=0$ con centro in (-8,-2) e raggio $R=2\sqrt{17}$.

La parabola ha generica equazione $y=ax^2+bx+c$. Il passaggio per O(0,0) comporta $c=0$; il passaggio per A(4,0) comporta, invece, $16a+4b+c=0$ da cui sfruttando $c=0$ si ricava $b=-4a$. L'equazione così diventa $y=a(x^2-4x)$. La derivata della parabola è $y'=2a(x-2)$; la tangente in (0,0) ha equazione $y=mx$ con $m=y'(0)=2a(0-2)=-4a$ per cui la tangente ha equazione $y=-4ax$. Poiché la parabola in O(0,0) è tangente alla circonferenza, e dal momento che in O(0,0) la circonferenza ha tangente di equazione $y=-4x$, la condizione di tangenza in O(0,0) tra la parabola e la circonferenza è soddisfatta se e solo le due tangenti coincidono e quindi se $a=1$.

La parabola, in conclusione, ha equazione $\lambda : y=(x^2-4x)$ con vertice in V(2,-4).

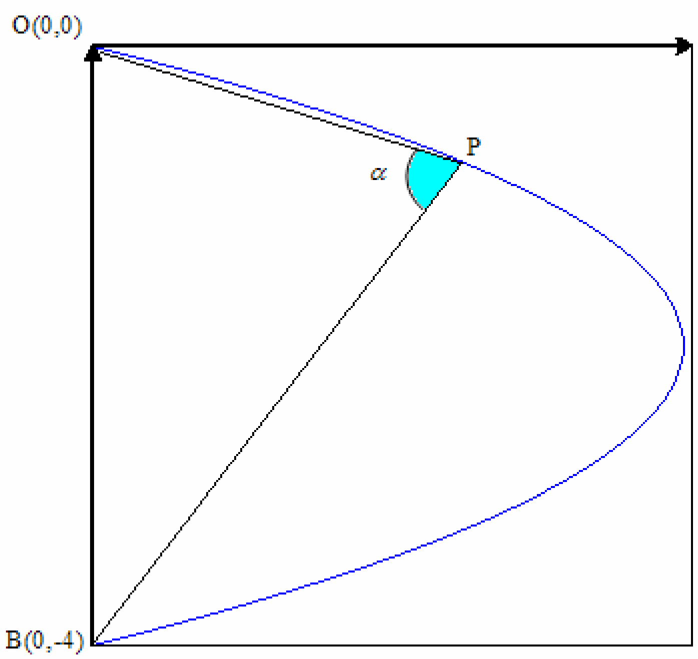
I grafici sono di seguito presentati in un unico sistema di riferimento:



Punto 2

Sia α l'angolo sotto cui è visto il segmento OB da un punto dell'arco di γ appartenente al quarto quadrante. Si dia una misura di α approssimandola in gradi e primi sessagesimali.

Supponiamo di prendere un punto del quarto quadrante di $\gamma : x^2 + y^2 + 16x + 4y = 0$ con ordinata maggiore di -2 senza perdere di generalità nel discorso che porteremo avanti. Tale punto avrà coordinate $P\left(x, -2 + \sqrt{4 - x^2 - 16x}\right)$; indichiamo inoltre l'angolo $A\hat{P}B = \alpha$. Il tutto è rappresentato nella figura sottostante in cui è raffigurata solo la parte di circonferenza del quarto quadrante:



Applicando il teorema di Carnot al triangolo OPB si ha $\cos(\alpha)=\frac{OP^2+PB^2-OB^2}{2\cdot OP\cdot PB}$.

Ma:

$$OP^2=x^2+\left(-2+\sqrt{4-x^2-16x}\right)^2=8-16x-4\sqrt{4-x^2-16x}$$
$$PB^2=x^2+\left(-2+\sqrt{4-x^2-16x}+4\right)^2=x^2+\left(2+\sqrt{4-x^2-16x}\right)^2=8-16x+4\sqrt{4-x^2-16x}$$
$$OB^2=16$$
$$OP\cdot PB=\sqrt{8-16x-4\sqrt{4-x^2-16x}}\cdot\sqrt{8-16x+4\sqrt{4-x^2-16x}}=\sqrt{(8-16x)^2-16\left(4-x^2-16x\right)}=$$
$$=\sqrt{64+256x^2-256x-64+16x^2+256x}=\sqrt{272x^2}=4x\sqrt{17}$$

in cui si è sfruttato che $|x|=x$ per $x\geq 0$.

In questo modo si ha:

$$\cos(\alpha)=\frac{OP^2+PB^2-OB^2}{2\cdot OP\cdot PB}=\frac{\left(8-16x-4\sqrt{4-x^2-16x}\right)+\left(8-16x+4\sqrt{4-x^2-16x}\right)-16}{8x\sqrt{17}}=$$
$$=\frac{-32x}{8x\sqrt{17}}=-\frac{4}{\sqrt{17}}=-\frac{4\sqrt{17}}{17}$$

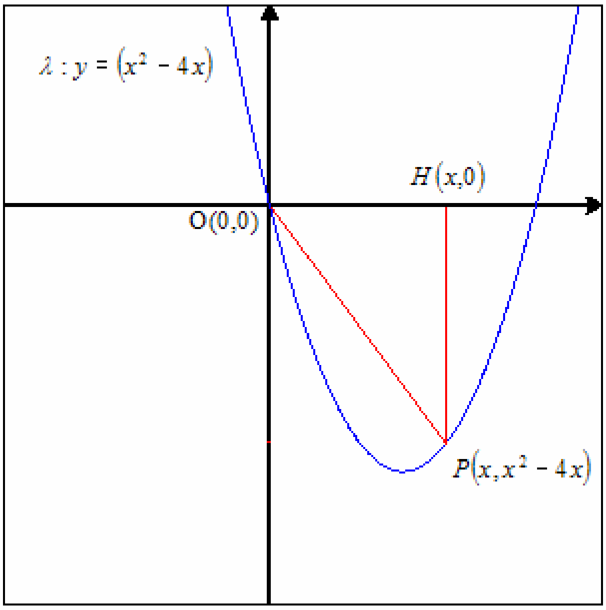
da cui $\alpha=\arccos\left(-\frac{4\sqrt{17}}{17}\right)\cong 169°57'50''$

Punto 3

Se P è un punto dell' arco di λ contenuto nel quarto quadrante e H la sua proiezione sull'asse x, si trovi la posizione di P affinché il triangolo OPH abbia area massima.

Un punto P di $\lambda: y=\left(x^2-4x\right)$ ha coordinate $P\left(x,x^2-4x\right)$ con $0\leq x\leq 4$. Di conseguenza $H(x,0)$.

Consideriamo la figura seguente:



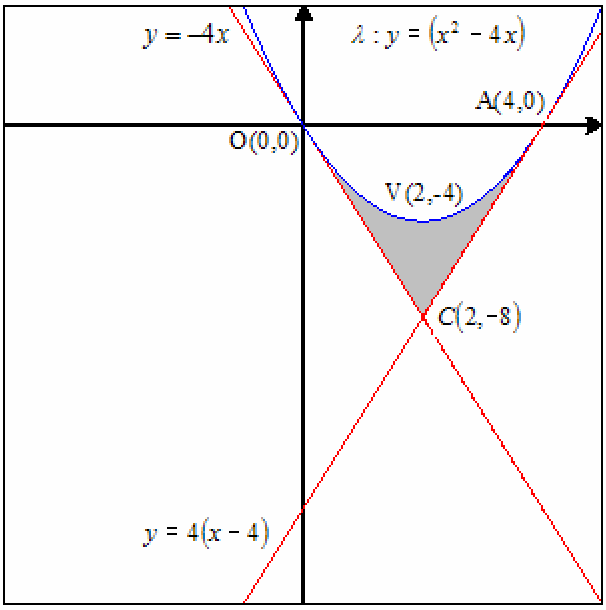
L’area del triangolo OPH è $S(OPH) = \frac{OH \cdot PH}{2} = \frac{x\left|x^2 - 4x\right|}{2}$ e poiché $0 \le x \le 4$ tale area vale $S(OPH) = \frac{OH \cdot PH}{2} = \frac{x(-x^2 + 4x)}{2}$. La derivata di tale area è $S'(OPH) = \frac{-3x^2 + 8x}{2}$ per cui la funzione area è strettamente crescente in $\left[0, \frac{8}{3}\right[$, strettamente decrescente in $\left]\frac{8}{3}, 4\right]$ e si annulla in $x = 0$ ed in $x = \frac{8}{3}$. In particolare la funzione area raggiunge il suo massimo in $x = \frac{8}{3}$ cui corrisponde l’area massima $S_{MAX}(OPH) = \frac{128}{27}$.

Punto 4

Si conducano le due rette tangenti a λ nei suoi punti O e A; si calcoli l’area del triangolo mistilineo delimitato dall’arco di parabola appartenente al quarto quadrante e dalle due tangenti.

La tangente in O(0,0) è già stata calcolata e vale $y = -4x$; la tangente in A(4,0) ha equazione $y = m(x-4)$ con $m = y'(4) = (2x-4)_{x=4} = 4$ pertanto la tangente in A(4,0) ha equazione $y = 4(x-4)$. Il punto di incontro delle due tangenti è $C(2,-8)$.

L’area da calcolare è raffigurata in grigio nella figura sottostante:



L'area del triangolo mistilineo la calcoleremo come differenza tra l'area del triangolo AOC e del segmento parabolico AO. L'area del triangolo AOC è $S(AOC)=\frac{4\cdot 8}{2}=16$, mentre l'area del segmento parabolico AO è i $\frac{2}{3}$ dell'area del rettangolo circoscritto per il teorema di Archimede. Quindi $S(Seg.Par.AO)=\frac{2}{3}\cdot(4\cdot 4)=\frac{32}{3}$ da cui l'area di interesse è $Area=16-\frac{32}{3}=\frac{16}{3}$.

Per via integrale l'area richiesta è pari a:

$$Area=\int_0^2\left[\left(x^2-4x\right)-(-4x)\right]dx+\int_2^4\left[\left(x^2-4x\right)-(4x-16)\right]dx=$$

$$=\int_0^2\left[x^2\right]dx+\int_2^4\left[(x-4)^2\right]dx=$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2+\left[\frac{(x-4)^3}{3}\right]_2^4=\frac{8}{3}+\frac{8}{3}=\frac{16}{3}$$

come già trovato.

PROBLEMA 2

Nell’insieme delle funzioni y = f (x) tali che

$$y' = \frac{ax}{\left(1+4x^2\right)^2}$$

si trovi quella il cui grafico γ passa per i punti $\left(\frac{1}{2},1\right)$ **e** $(0,2)$

Si tratta di risolvere l’equazione differenziale del primo ordine $y' = \frac{ax}{\left(1+4x^2\right)^2}$ e quindi di risolvere l’integrale $f(x) = \int \frac{ax}{\left(1+4x^2\right)^2}dx$. Tale integrale è di facile risoluzione, infatti:

$$f(x) = \int \frac{ax}{\left(1+4x^2\right)^2}dx = \frac{a}{8}\int (8x)\left(1+4x^2\right)^{-2}dx = \frac{a}{8}\cdot\left(-\frac{1}{\left(1+4x^2\right)}\right) + k = -\frac{a}{8\left(1+4x^2\right)} + k.$$

Il passaggio per $\left(\frac{1}{2},1\right)$ comporta $-\frac{a}{16}+k=1$, mentre quello per $(0,2)$ impone $-\frac{a}{8}+k=2$.

Bisogna risolvere il sistema di due equazioni in due incognite seguente:

$$\begin{cases} -\frac{a}{16}+k=1 \\ -\frac{a}{8}+k=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-16 \\ k=0 \end{cases} \text{ da cui } f(x) = \frac{2}{\left(1+4x^2\right)}.$$

Punto 1

Constatato che la funzione definita da: $y = \frac{2}{1+4x^2}$ **è quella richiesta, si disegni γ.**

Studiamo la funzione $y = \frac{2}{1+4x^2}$

Dominio: R

Intersezioni asse ascisse: cui non ci sono intersezioni con l’asse delle ascisse

Intersezioni asse ordinate: $x=0 \Rightarrow y=2$

Eventuali simmetrie: la funzione è pari

Positività: $y = \frac{2}{1+4x^2} > 0 \ \ \forall x \in R$

Asintoti verticali: non ce ne sono

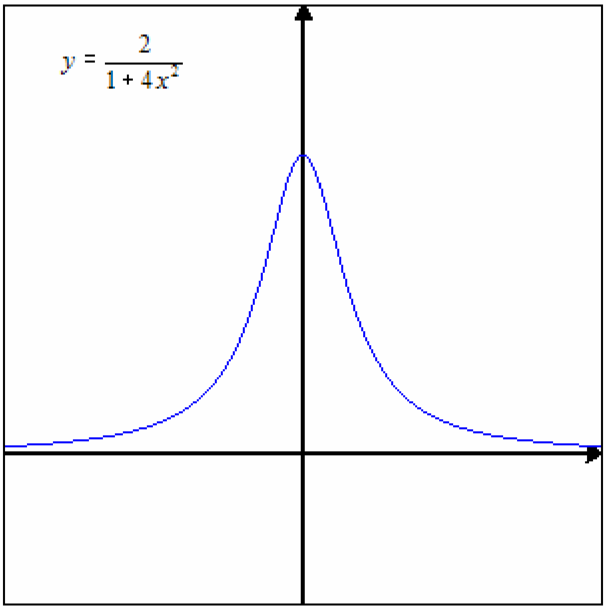
Asintoti orizzontali: $\lim_{t\to\pm\infty}\left(\frac{2}{1+4x^2}\right) = 0$ per cui la retta $y=0$ è asintoto orizzontale

Crescenza e decrescenza: $y'=\frac{-16x}{\left(1+4x^2\right)^2}$ per cui la funzione è strettamente crescente in $(-\infty,0)$, strettamente decrescente in $(0,+\infty)$ e si annulla in $x=0$ in cui presenta un massimo assoluto $M(0,2)$.

Concavità e convessità:

$y'=\frac{-16\left(1+4x^2\right)^2+16x\cdot 16x\left(1+4x^2\right)}{\left(1+4x^2\right)^4}=\frac{16\left(1+4x^2\right)\left[16x^2-\left(1+4x^2\right)\right]}{\left(1+4x^2\right)^4}=\frac{16\left[12x^2-1\right]}{\left(1+4x^2\right)^3}$ per cui la funzione presenta due flessi alle ascisse $x_1=-\frac{1}{2\sqrt{3}}, x_2=\frac{1}{2\sqrt{3}}$.

Il grafico è di seguito presentato:



Punto 2

Si conduca la tangente a γ in un suo generico punto P. Sia Q l'intersezione di tale tangente con l'asse x e H la proiezione ortogonale di P sull'asse x. Per quale valore di x è minima la lunghezza del segmento HQ ?

Un punto P generico di $y=\frac{2}{1+4x^2}$ ha coordinate $P\left(t,\frac{2}{1+4t^2}\right)$. La tangente in $P\left(t,\frac{2}{1+4t^2}\right)$ ha equazione $y=m(x-t)+\frac{2}{1+4t^2}$ con $m=y'(t)=\left[\frac{-16x}{\left(1+4x^2\right)^2}\right]_{x=t}=\frac{-16t}{\left(1+4t^2\right)^2}$ pertanto la tangente ha equazione $y=\left(\frac{-16t}{\left(1+4t^2\right)^2}\right)(x-t)+\frac{2}{1+4t^2}=\frac{-16tx}{\left(1+4t^2\right)^2}+\frac{24t^2+2}{\left(1+4t^2\right)^2}$.

In tal modo i punti Q ed H hanno coordinate $Q\left(\frac{12t^2+1}{8t},0\right)$ ed $H(t,0)$. Il segmento HQ misurerà

$$HQ=g(t)=\left|\frac{12t^2+1}{8t}-t\right|=\left|\frac{4t^2+1}{8t}\right|=\frac{4t^2+1}{8|t|}=\begin{cases}\frac{4t^2+1}{8t} & t>0\\ -\frac{4t^2+1}{8t} & t<0\end{cases}.$$

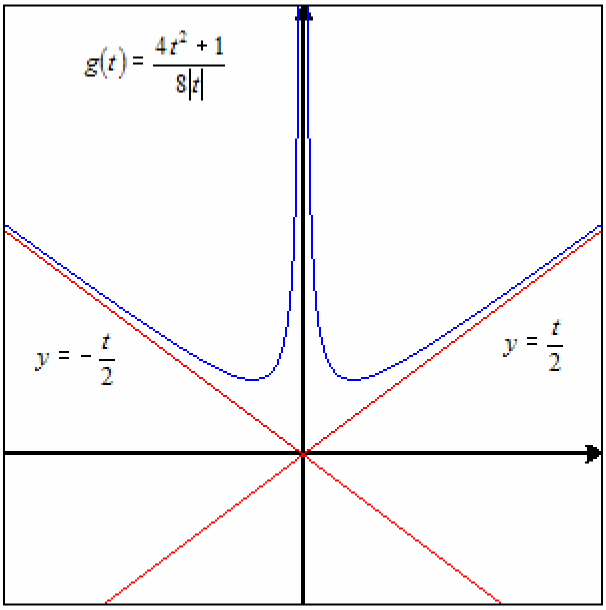
In realtà visto che $g(t)=\frac{4t^2+1}{8|t|}$ è una funzione pari, basta discutere il caso in cui $t>0$, in quanto tutto identicamente si ripete simmetricamente per $t<0$.

Calcoliamo quindi la derivata della funzione $g_+(t)=\frac{4t^2+1}{8t}$ con $t>0$. Si ha $g_+'(t)=\frac{4t^2-1}{8t^2}$ per cui la funzione $g_+(t)=\frac{4t^2+1}{8t}$ è strettamente crescente in $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$, strettamente decrescente in $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ e si annulla in $t=\frac{1}{2}$ in cui presenta un minimo $m\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. Per simmetria la funzione $g_-(t)=-\frac{4t^2+1}{8t}$ presenta un minimo $m_1\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

In conclusione i valori $t=\pm\frac{1}{2}$ minimizzano la funzione $g(t)=\frac{4t^2+1}{8|t|}$.

La funzione $g_+(t)=\frac{4t^2+1}{8t}=\frac{t}{2}+\frac{1}{8t}$ con $t>0$ non è altro che una iperbole con centro di simmetria $(0,0)$ ed asintoto verticale in $t=0$ ed obliquo in $y=\frac{t}{2}$. Analogamente la funzione $g_-(t)=-\frac{4t^2+1}{8t}=-\frac{t}{2}-\frac{1}{8t}$ con $t<0$ non è altro che una iperbole con centro di simmetria $(0,0)$ ed asintoto verticale in $t=0$ ed obliquo in $y=-\frac{t}{2}$.

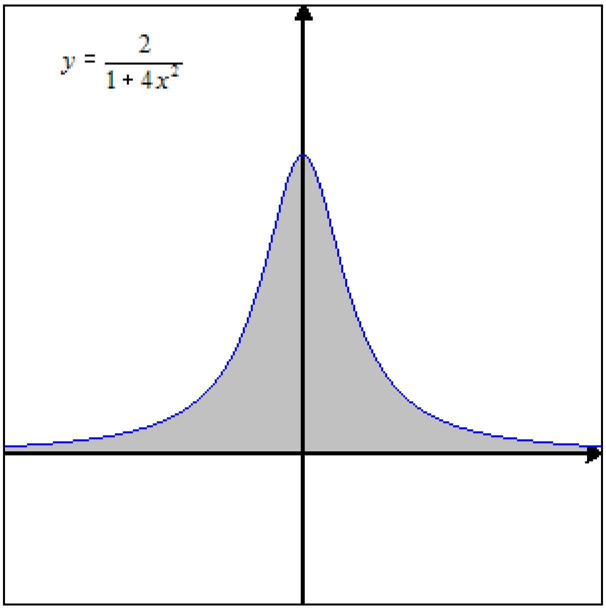
Il grafico della funzione $g(t)=\frac{4t^2+1}{8|t|}$ è sotto riportato:



Punto 3

Si calcoli l'area della superficie piana delimitata da γ e dagli assi cartesiani.

L'area da calcolare è raffigurata in grigio nella figura sottostante:



e vale:

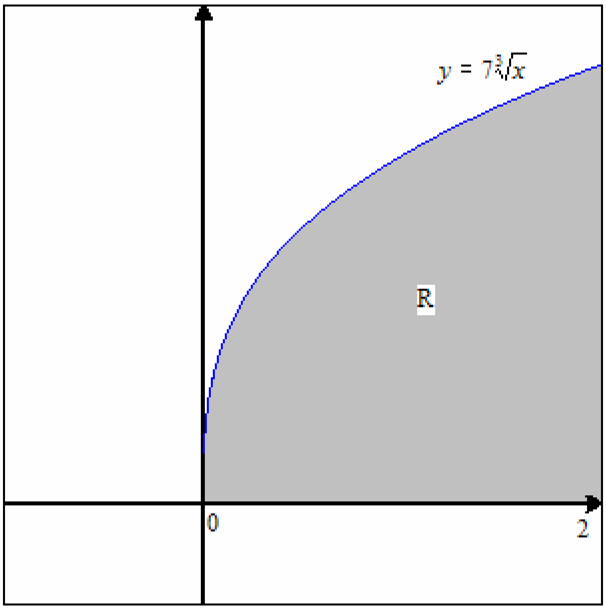
$$Area = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{1+4x^2}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{1+(2x)^2}dx = [\arctan(x)]_{-\infty}^{+\infty} = \arctan(+\infty) - \arctan(-\infty) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

QUESTIONARIO

Quesito 1

La regione R delimitata dal grafico di $y = 7\sqrt[3]{x}$, dall'asse x e dalla retta x=2 è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte dei quadrati. Si calcoli il volume di S.

La regione R è quella mostrata in figura di seguito:



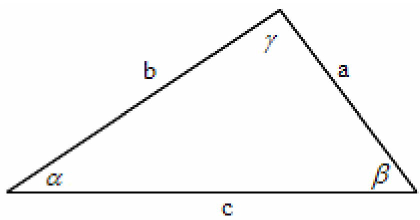
L'area del quadrato sezione è $A(x) = \left(7\sqrt[3]{x}\right)^2 = 49\left(x^{\frac{2}{3}}\right)$ per cui il volume richiesto è

$$\int_0^2 49\left(x^{\frac{2}{3}}\right)dx = \frac{147}{5}\left[x^{\frac{5}{3}}\right]_0^2 = \frac{294\sqrt[3]{4}}{5}.$$

Quesito 2

Le misure dei lati di un triangolo sono 12, 16 e 20 *cm*. Si calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, le ampiezze degli angoli del triangolo approssimandole in gradi e primi sessagesimali.

Consideriamo il triangolo sottostante in cui a=12 cm, b=16 cm, c=20 cm, e gli angoli α, β, γ si oppongono rispettivamente ad a,b e c.



Notiamo subito che $c^2 = a^2 + b^2$ per cui il triangolo è rettangolo e cioè $\gamma = 90°$. Inoltre per il teorema dei seni si trova subito

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{a}{c}\right) = \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) \cong 36°52'11''$$

$$\beta = \arcsin\left(\frac{b}{c}\right) = \arcsin\left(\frac{4}{5}\right) \cong 53°7'49''$$

Se il triangolo non fosse stato rettangolo, avremmo potuto seguire la strada di applicare 3 volte, una volta per ogni lato, il teorema di Carnot . In tal caso si ha:

$$\cos(\alpha) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{512}{640} = \frac{4}{5} \to \alpha = \arccos\left(\frac{4}{5}\right) \cong 36°52'11''$$

$$\cos(\beta) = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{288}{480} = \frac{3}{5} \to \beta = \arccos\left(\frac{3}{5}\right) \cong 53°7'49''$$

$$\cos(\gamma) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = 0 \to \gamma = 90°$$

come già trovato.

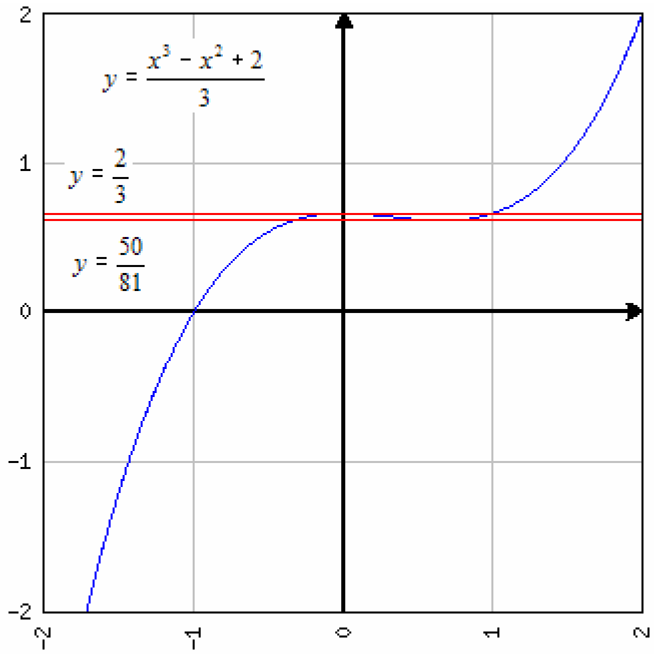
Quesito 3

Si determini, al variare di k, il numero delle soluzioni reali dell'equazione:

$$x^3 - x^2 - 3k + 2 = 0$$

Si tratta di discutere il sistema $\begin{cases} y = k \\ y = \dfrac{x^3 - x^2 + 2}{3} \end{cases}$. La retta $y = k$ è parallela all'asse delle ascisse, mentre la curva di equazione $y = \dfrac{x^3 - x^2 + 2}{3} = \dfrac{(x+1)(x^2 - 2x + 2)}{3}$ è una cubica definita in tutto R, che interseca le ascisse in (-1,0), le ordinate in (0,2), è positiva o uguale a zero per $x \geq -1$, non presenta asintoti, è strettamente crescente in $(-\infty, 0) \vee \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$, strettamente decrescente in $\left(0, \frac{2}{3}\right)$, presenta un massimo in $M = \left(0, \frac{2}{3}\right)$, un minimo in $m = \left(\frac{2}{3}, \frac{50}{81}\right)$ ed un flesso in $\left(\frac{1}{3}, \frac{52}{81}\right)$.

Consideriamo il grafico sottostante che rappresenta la cubica:



Dal grafico si notano le seguenti soluzioni:

- $k < \frac{50}{81}$: 1 soluzione negativa
- $k = \frac{50}{81}$: 3 soluzioni di cui una negativa e due coincidenti pari a $x = \frac{2}{3}$
- $\frac{50}{81} < k < \frac{2}{3}$: 3 soluzioni di cui una negativa e due positive distinte
- $k = \frac{2}{3}$: 3 soluzioni di cui una positiva e pari a $x = 1$ e due coincidenti pari a $x = 0$
- $k > \frac{2}{3}$: 1 soluzione positiva

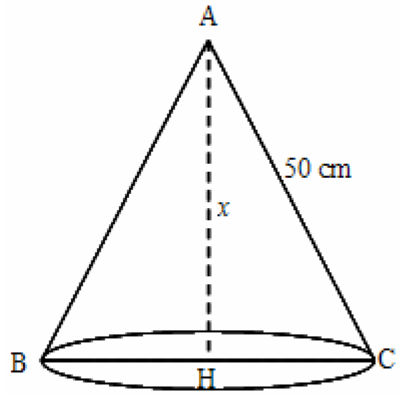
Riassumendo si ha:

- $k < \frac{50}{81} \vee k > \frac{2}{3}$: 1 soluzione
- $\frac{50}{81} \le k \le \frac{2}{3}$: 3 soluzioni

Quesito 4

La capacità di una damigiana di vino è pari a quella del massimo cono circolare retto di apotema *50cm*. Si dica quanti *litri* di vino la damigiana può contenere.

Consideriamo la figura sottostante:



Indichiamo l'altezza del cono $AH = x$ con $0 < x < 50$. Il raggio di base del cono sarà $HC = \sqrt{2500 - x^2}$ ed il volume del cono sarà di conseguenza $V = \frac{\pi \cdot AH \cdot HC^2}{3} = \frac{\pi \cdot x \cdot (2500 - x^2)}{3}$. La massimizzazione del volume la effettuiamo tramite il calcolo della derivata prima. La derivata prima è $V' = \frac{\pi \cdot (2500 - 3x^2)}{3}$ per cui la funzione volume è strettamente crescente in $\left(0, \frac{50\sqrt{3}}{3}\right)$, strettamente decrescente in $\left(\frac{50\sqrt{3}}{3}, 50\right)$ e presenta un massimo in $M\left(\frac{50\sqrt{3}}{3}, \frac{250000\sqrt{3}\pi}{27}\right)$. Quindi il volume massimo vale $V_{max} = \frac{250000\sqrt{3}\pi}{27} cm^3 = \frac{250\sqrt{3}\pi}{27} \cdot (1000 cm^3) = \frac{250\sqrt{3}\pi}{27} dm^3 \cong 50.4 dm^3 = 50.4$ litri.

Quesito 5

Si dimostri che l'equazione $x^7 + 5x + 5 = 0$ ha una sola radice reale.

La funzione $h(x) = x^7 + 5x + 5$ è una funzione strettamente crescente in tutto R: infatti presenta come derivata $h'(x) = 7x^6 + 5$ che risulta essere sempre positiva in R. Inoltre $h(-1) = -1 < 0, h(0) = 5 > 0$, per cui $h(x) = x^7 + 5x + 5$ presenterà un unico zero reale appartenente all'intervallo (-1,0). Applichiamo il metodo di bisezione per calcolare lo zero $\alpha \in (-1,0)$. Supponiamo di voler calcolare lo zero con un'approssimazione con due cifre decimali esatte.

Lo sviluppo è presentato di seguito in forma tabellare.

a	b	$\frac{a+b}{2}$	$h(a)$	$h(b)$	$h\left(\frac{a+b}{2}\right)$	$b-a$	$err = 0.01$ $b-a < err$?	Numero bisezioni
-1,0000	0,0000	-0,5000	-1,0000	5,0000	2,4921	1,0000		
-1,0000	-0,5000	-0,7500	-1,0000	2,4921	1,1165	0,5000	no	1
-1,0000	-0,7500	-0,8750	-1,0000	1,1165	0,2323	0,2500	no	2
-1,0000	-0,8750	-0,9375	-1,0000	0,2323	-0,3240	0,1250	no	3
-0,9375	-0,8750	-0,9063	-0,3240	0,2323	-0,1186	0,0625	no	4
-0,9063	-0,8750	-0,8907	-0,1186	0,2323	0,1017	0,0313	no	5
-0,9063	-0,8907	-0,8985	-0,1186	0,1017	-0,0347	0,0156	no	6
-0,8985	-0,8907	**-0,8946**	-0,0347	0,1017	0,0684	0,0078	**STOP**	**7**
-0,8985	**-0,8907**							

In conclusione con due cifre significative $\alpha = -0.89$ dopo 7 bisezioni.

Quesito 6

Si traccino i grafici delle seguenti funzioni di R in R:

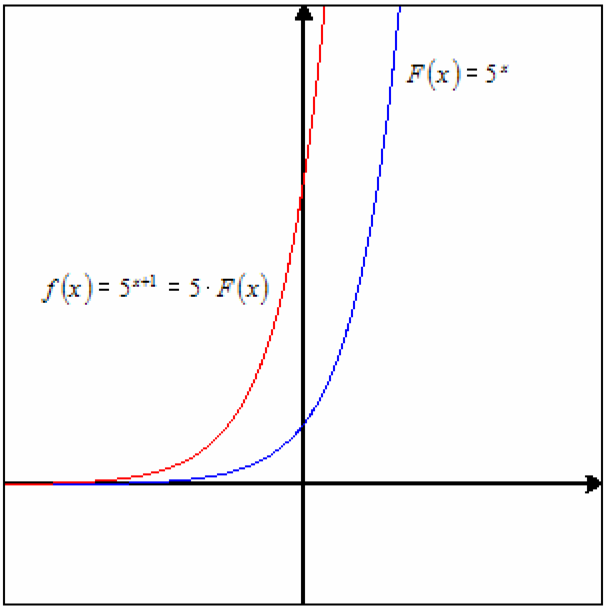
$$f : x \to 5^{x+1}; g : x \to 5^x + 1; h : x \to 5^{|x|}; k : x \to 5^{-x}$$

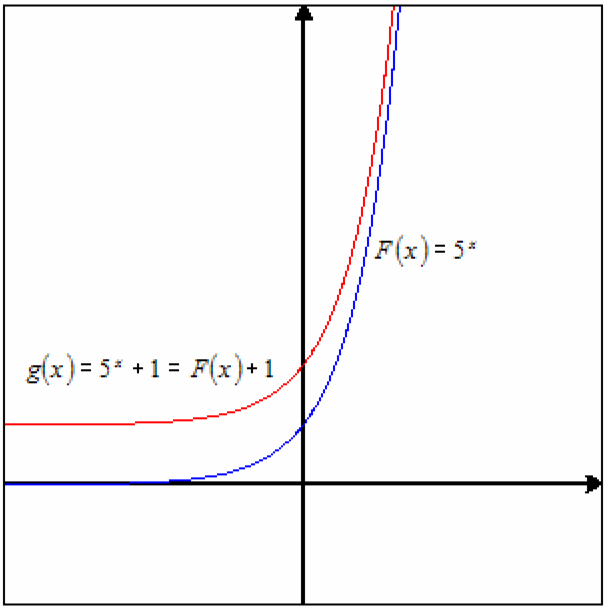
Tutte le funzioni si possono studiare a partire dalla funzione $F(x) = 5^x$. Infatti:

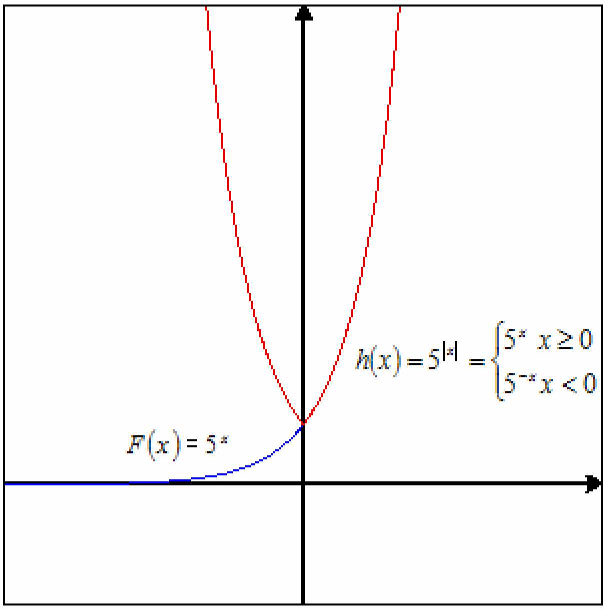
- Il grafico di $f : x \to 5^{x+1}$ si ricava da quello di $F(x) = 5^x$ moltiplicando tutte le ordinate per 5 dal momento che $f(x) = 5^{x+1} = 5 \cdot 5^x = 5 \cdot F(x)$;
- Il grafico di $g : x \to 5^x + 1$ si ricava da quello di $F(x) = 5^x$ traslandolo di una unità verso le ordinate positive dal momento che $g(x) = 5^x + 1 = F(x) + 1$;
- Il grafico di $h : x \to 5^{|x|}$ per $x \geq 0$ coincide con quello di $F(x) = 5^x$, mentre per $x < 0$ coincide con il simmetrico rispetto all'asse delle ordinate del grafico di $F(x) = 5^x$ per $x \geq 0$ dal momento che $h(x) = 5^{|x|} = \begin{cases} 5^x = F(x) & x \geq 0 \\ 5^{-x} = F(-x) & x < 0 \end{cases}$
- Il grafico di $k : x \to 5^{-x}$ è il simmetrico rispetto all'asse delle ordinate di quello di $F(x) = 5^x$ dal momento che $k(x) = 5^{-x} = F(-x)$.

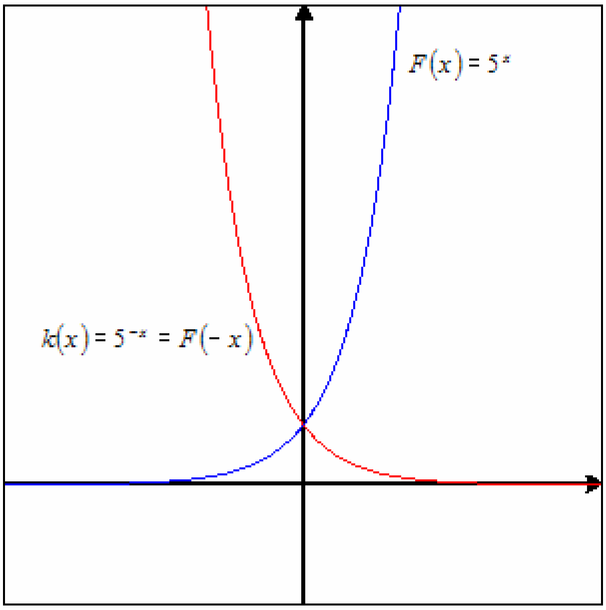
La funzione $F(x) = 5^x$ è una esponenziale, per cui sempre positiva, definita, continua e derivabile in tutto R, che presenta l'asintoto orizzontale sinistro $y = 0$ e strettamente crescente in tutto R.

I grafici delle funzioni sono di seguito riportati: su ogni grafico è mostrata la funzione di interesse (in rosso anche quando il grafico coincide con quello della funzione base) ed anche la funzione "base" (in blu) $F(x) = 5^x$:









Quesito 7

Quale significato attribuisci al simbolo $\binom{n}{k}$? Esiste un k tale che $\binom{10}{k}=\binom{10}{k-2}$?

Il coefficiente binomiale è definito da $C(n;k)=\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$ ed esso fornisce il numero delle combinazioni semplici di n elementi di lunghezza k.

Ad esempio se si vuole calcolare quante volte escono $\{4\,\text{Teste}\}$ da 8 lanci di una moneta non truccata, basta calcolare $C(8;4)=\binom{8}{4}=\frac{8!}{4!\cdot(8-4)!}=70$.

Per rispondere alla seconda domanda basta ricordare una proprietà notevole del coefficiente binomiale: $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$. Nel nostro caso $n=10$, per cui il valore di k tale che $\binom{10}{k}=\binom{10}{k-2}$ deve soddisfare la relazione $10-k=k-2$ da cui $k=6$; infatti con $k=6$ $\binom{10}{k}=\binom{10}{6}=\frac{10!}{6!\cdot 4!}$ e $\binom{10}{k-2}=\binom{10}{4}=\frac{10!}{4!\cdot 6!}$.

Il valore trovato può essere calcolato anche senza ricordare l'identità notevole e risolvendo l'equazione direttamente. In tal caso si ha:

$\binom{10}{k}=\binom{10}{k-2}\Leftrightarrow\frac{10!}{k!\cdot(10-k)!}=\frac{10!}{(k-2)!\cdot(12-k)!}\Leftrightarrow\frac{(12-k)!}{(10-k)!}=\frac{k!}{(k-2)!}$ da cui $(11-k)(12-k)=k(k-1)\Rightarrow 132-23k+k^2=k^2-k\Rightarrow 22k=132\Rightarrow k=6$ come precedentemente trovato.

Quesito 8

Dimostra che la media geometrica di due numeri positivi non è mai superiore alla loro media aritmetica. Cioè $\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}$.

La disequazione si scrive $2\sqrt{ab}\le a+b$ ed elevando al quadrato ambo i membri si ottiene $4ab\le a^2+b^2+2ab$ da cui $a^2+b^2-2ab\ge 0\Rightarrow(a-b)^2\ge 0$, disequazione quest'ultima sempre soddisfatta $\forall a,b\in R^+$.